

Vibrations et ondes

Dmitrií Sadovskíí

Département de physique, Université du Littoral, LPCA

e-mail: sadovski@univ-littoral.fr, web: <http://pca3.univ-littoral.fr/~sadovski>

Calais, automne 2023

Horaires

cours-TD en 12–14 séances de 3h. habituellement 8⁴⁵–12⁰⁰ lundi, bât C, à partir de 21/9 et jusqu'à décembre...

les TP sont suivis par un autre enseignant (*Christophe Przygodsky*)

Contenu du cours

Ce cours traditionnel est destiné aux étudiants de la troisième année en licence sciences du tronc commun physique–chimie à Calais. Il a été enseigné auparavant par les Professeurs *Hadj Abdelhak* (2006–2007) et *Robin Bocquet* (2008). Le cours aura les thèmes principales suivantes.

Oscillateur harmonique libre (2 séances)

- Différents exemples (mécanique, électricité).
- Rappels sur la mécanique Newtonienne. Forces.
- Linéarité et non-linéarité.
- Notions de la mécanique Lagrangienne et Hamiltonienne.
- Diagramme de phases, l'espace des phases.

Oscillateur harmonique libre amorti (1 séance)

Oscillations forcées par une force harmonique (1–2 séances)

Oscillateur anharmonique (1 séance) Notions de la théorie des perturbations. NB : ce thème est facultatif, il est adressé principalement aux étudiants qui ont choisi l'option Physique et qui font le projet numérique dans le cadre du cours «Physique numérique» (D. Sadovskíí, Ch. Przygodsky)

Partiel sur les oscillations (2h). TD correction immédiate (1–2h).

Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté (2 séances) Solution générale par les outils matriciels. Modes propres. Cas non-linéaire : l'idée du couplage, résonances. Ce thème sert comme une transition aux ondes (systèmes au nombre infini des degrés de liberté).

Ondes nondispersives (2 séances)

- La corde. Ondes transversales et longitudinales, planes, cylindriques, sphériques.
- Propagation. Interférence et diffraction.
- Ondes sinusoïdales progressives et stationnaires. Nœuds, conditions limite. Résonateurs. Son.
- Equation d'onde (d'Alembert). Equation de corde.
- Terminaison. Réflexion.

Ondes dispersives (1 séance)

Modalités de contrôles des connaissances

Contrôle continu Pour pouvoir mieux interagir et démontrer leur niveau de compréhension (ou incompréhension...), les étudiants passent rapidement au tableau en TD. En cours les étudiants seront parfois demandés de répondre par écrit aux 2-3 questions rapides. Il n'y aura pas des notes (sauf si l'on demande exprès), et il ne faut pas avoir peur. *C'est la participation qui compte.*

Partiel Il y a un partiel (DS) écrit au mi-cours. Ce partiel couvre le thème «Vibrations». Il est noté sur 20.

L'examen final porte sur tout le cours et est noté sur 20,

la note finale est définie avec le règle du sup contre la moyenne examen+DS.

Livres

- «Oscillations» de Ph. Chen & R. Guillemard, rappels des cours et exercices (existe dans la BU). Voir Chap. 1 et 2.
- «Mécanique» (physique théorique Tome 1) de L.D. Landau & E.Lifchitz, Mir 1988. Pour la partie vibrations : le plus compacte cours de méca classique.
- «Classical Mechanics» par David Morin (Cambridge University Press, 2008)
- «Ondes mécaniques et sonores» de H. LUMBROSO, 2me année, Dunod, Paris, 1999. Voir Chap. 1 et 2 pour la partie ondes, un peu trop avancé.

Rappels sur le cours «Vibration et ondes» License 3me année. Calais

Version vibondes 2023-12-19 12:14 ©2023 Dmitrií A. Sadovskií. Toute dissémination et reproduction autres que dans le cadre de l'enseignement à l'Université du littoral sont interdites.

La version la plus récente de ce manuel est disponible en format électronique (pdf) sur <http://purple.univ-littoral.fr/etudes/vibondes.pdf>



Vos suggestions, améliorations et corrections sont bienvenues.

Merci de les envoyer par mél à sadovski@univ-littoral.fr

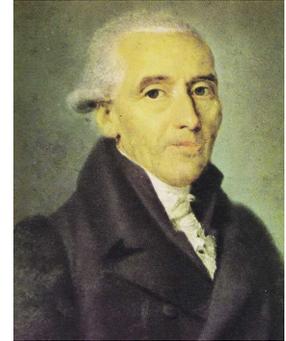


Rappels sur la mécanique

La mécanique est historiquement la première théorie dynamique. Dans une telle théorie, on peut trouver l'état du système à n'importe quel moment du temps (ou plus généralement, pour n'importe quelle valeur de la variable indépendante) si on connaît son état à un moment du temps donné.

L'évolution du système en temps est décrit par une équation différentielle ordinaire (é.d.o.) ou un système de tels équations. Soit K le nombre de degrés de liberté, t temps, q_k les coordonnées, $\dot{q}_k = dq_k/dt$ les vitesses, où $k = 1, \dots, K$.

L'hypothèse centrale de la mécanique : pour caractériser l'état du système à tout moment du temps donné il suffit de donner sa position q et sa vitesse (dérivée première) \dot{q} . Ainsi l'évolution d'un système mécanique est décrit par des é.d.o.'s d'ordre ≤ 2 , c'est à dire les équations qui contiennent les positions $q = (q_1, \dots, q_K)$ et ses dérivées premières \dot{q} et secondes \ddot{q} . On appelle espace des configurations l'espace de dimension K avec coordonnées q_k , et on considère la trajectoire $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ du système dans l'espace des phases de dimension $2K$.



Joseph Louis Lagrange

Lagrange On écrit les équations de Lagrange pour la fonction de Lagrange (ou *Lagrangien*) L ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

NB : on appelle q et \dot{q} coordonnées et vitesses généralisées. Pour des systèmes simples avec des masses ponctuelles sans contraintes, on distingue *énergie cinétique* $T(q, \dot{q})$ et *énergie potentielle* $V(q)$, telles que $L = T - V$

Newton Pour des masses ponctuelles on écrit leurs énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{q}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2$$

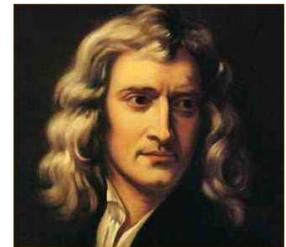
On assume aussi que V est une fonction réelle de $q(t)$ seulement. On compute l'accélération

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m_k \ddot{q}_k = m_k \dot{v}_k = m_k a_k$$

et la force

$$F_k = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad \text{soit } \vec{F} = -\nabla_q V(q)$$

NB : Newton (1643–1727) formulait sa théorie mécanique bien avant Lagrange (1736–1813) mais l'approche de ce dernier est la plus générale. La mécanique de Newton (et Kepler) est un cas particulier de la mécanique Lagrangienne.



Isaak Newton

Hamilton On définit la *quantité du mouvement*

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

et la fonction d'Hamilton (ou *Hamiltonien*)

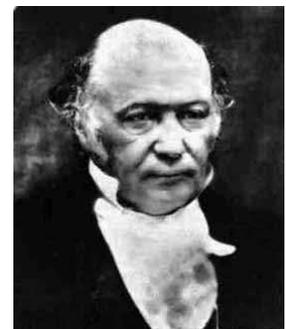
$$H(q, p, t) := \sum_{k=1}^K \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t).$$

L'évolution du système est donnée par sa trajectoire $(q(t), p(t))$ qui satisfait K é.d.o.'s d'ordre 1

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Notons que dans le cas simple (N particules ponctuelles, $K = 3N$)

$$\vec{p}_n := m_n \dot{\vec{r}}_n := m_n \vec{v}_n \quad \text{et} \quad H = T + V.$$



William Rowan Hamilton

NB : Cette approche est la plus utile dans le cas *sans dissipation* où l'énergie est conservée. On connaît aussi des applications en mécanique quantique, où l'énergie est conservée (et quantifiée) et où H devient l'opérateur différentiel \hat{H} .

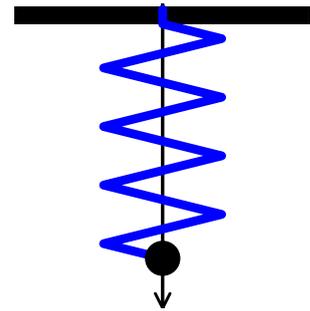
1 Oscillateur harmonique libre

1.1 Cours

- Introduction, présentation et plan du cours
- Rappels sur la mécanique Newtonienne. Forces.
- Pendule mathématique, voir la fig. 2
- Linéarité et non-linéarité.
- Diagramme de phases, l'espace des phases (fig. 1).
- Diagramme de phases complète du pendule, à suivre dans la sec. 5, fig. 6.

1.2 TD

- Questionnaire éclair de la rentrée (20 min), correction
- oscillateur à ressort posé verticalement

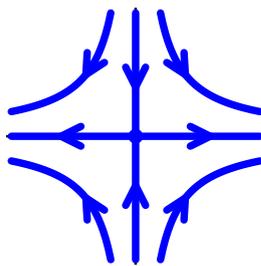


Ressort vertical

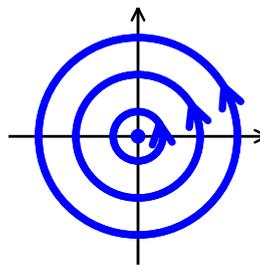
2 Oscillateur harmonique libre, et libre amorti

2.1 Cours

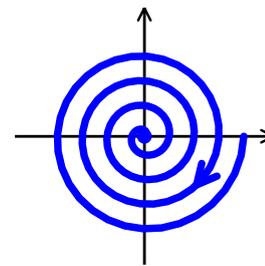
- Questionnaire éclair : oscillations libres (15 min)
- Récapitulatif sur séance 1 : équations et leur solutions
- Solution générale matricielle des équations différentielles ordinaires linéaires sur l'exemple simple d'un oscillateur libre



(a) hyperbolique



(b) elliptique

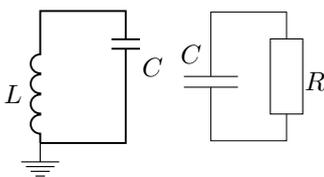


(c) focale

FIG. 1 – Portraits locaux dans un espace des phases \mathbb{R}^2 avec les coordonnées (x, \dot{x})

2.2 TD oscillations libres

Exercice 2.1. Lequel des systèmes dont le portrait de phases est présenté sur la figure 1 est stable ? instable ?



Exemple en circuits électrique LC, RC, RLC Rappels : Les paramètres du système sont inductivité L résistance ohmique R , et capacité C ; l'état du système est décrit en utilisant les charges $q(t)$ et les courants

$$j(t) = \frac{dq}{dt}$$

la variable indépendante est le temps t . L'énergie potentielle correspond à la tension u .

Nous avons

$$u_L = -L \frac{dj}{dt}, \quad u_C = \frac{q}{C} \quad \text{et donc} \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}$$

Question : Comparez ce(s) circuit(s) à un système mécanique (ressort, pendule, ...). Quels sont les équivalents mécaniques de R , L , et C ?

Exercice 2.2. Oscillation électrique libre non-amortie (*circuit LC*). Charge et décharge d'un condensateur. Considérez le condensateur C branché sur la résistance R comme montré sur la figure ci-à-gauche. Dérivez l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ aux bornes de C . Soit $u(0) > 0$ au moment $t = 0$. Trouvez $u(t)$ pour $t > 0$.

Exercice 2.3. Amortissement (*circuit RC*). Charge et décharge d'un condensateur. Considérez le condensateur C branché sur la résistance R comme montré sur la figure ci-à-gauche. Dérivez l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ aux bornes de C . Soit $u(0) > 0$ au moment $t = 0$. Trouvez $u(t)$ pour $t > 0$.

Pendule

Exercice 2.4 (pendule plan). Considérez le pendule mathématique plan à faible amplitude, fig. 2a. En particulier, prenez l'exemple du fameux pendule de *Foucault*, fig. 2b, une balle de 28 kg suspendue au bout d'une corde en acier de 1.5 mm de diamètre (corde de piano) et de longueur $l = 67$ m à un point situé au centre de la coupole du *Panthéon*. Dessinez le portrait de l'équilibre de ce système, comparez à fig. 1b.

Exercice 2.5 (pendule circulaire). Considérez le pendule mathématique plan à l'amplitude arbitraire, voir la fig. 2c. Quel est l'espace des phases de ce système ? Combien points d'équilibre y-a-t-il ? Quelle est leur stabilité ? Dessinez le portrait local de chaque équilibre, comparez aux fig. 1a-1b. Dessinez le portrait global du système dans l'espace des phases.

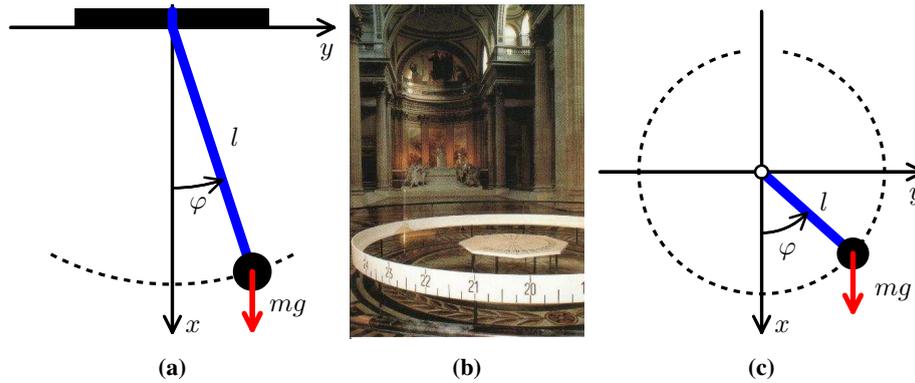


FIG. 2 – Pendule mathématique restreint dans un plan : a à faible amplitude, b pendule de *Foucault* au *Panthéon*, c circulaire

Solution On peut choisir les coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, φ) comme indiqué sur la fig. 2a. A noter que $\varphi = 0$ sur l'axe x et $\varphi > 0$ pour $y > 0$. Le rayon $r \equiv l$ est fixe et par conséquent, ce système possède un degré de liberté car les deux coordonnées x et y sont liées par la relation

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}df/dt = \dot{x}x + \dot{y}y = 0 \quad (2.1)$$

Autrement, on constate que la position du système peut être définie par une seule coordonnée, l'angle φ , et qu'on pourrait donc utiliser φ comme une coordonnée généralisée. On remarque que

$$x = r \cos \varphi \quad \text{et} \quad y = r \sin \varphi \quad \text{avec} \quad r \equiv l = \text{const.}$$

On calcule les dérivées (à savoir faire abseulement !)

$$\dot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad (2.2)$$

Les énergies cinétique et potentielle sont, respectivement,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \quad \text{et} \quad V = -mg(x - l) = -mgl(\cos \varphi - 1) \approx \frac{1}{2} mgl \varphi^2 \quad (2.3)$$

Notez que $V(x, y)$ peut être choisi à une constante près ; ici son zero est à l'équilibre du système avec $x = l$ et $y = 0$. Pour approximer $V(\varphi)$, on utilise le développement limité de $\cos \varphi$ pour $|\varphi| \ll \pi/2$:

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{24} \varphi^4 + O(\varphi^6) \quad \text{et} \quad \sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + O(\varphi^5).$$

En notant qu'en coordonnées polaires, l'énergie totale

$$H \approx \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mgl \varphi^2$$

est celle d'un oscillateur harmonique en φ , nous obtenons la solution. Autrement, on élimine x et \dot{x} de $T + V$ en utilisant (2.1) et on simplifie en utilisant le développement par rapport à $y/l < y_{\max}/l = \varepsilon \ll 1$. Ainsi on obtient

$$T + V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 (1 - y^2/x^2) + mg(l - \sqrt{l^2 - y^2}) \approx \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m(g/l) y^2.$$

où on utilise $y^2/x^2 \sim O(y^2/l^2) \ll 1$ et le développement $\sqrt{1 - y^2/l^2} \approx 1 - \frac{1}{2} y^2/l^2 + O(\varepsilon^4)$. Notez aussi, que $T_{\max} = V_{\max}$ et que $\dot{y}_{\max} = \sqrt{gl} y_{\max}/l$. Par conséquent, le terme $\dot{y}^2 y^2/x^2 \sim O(\varepsilon^4)gl$ peut être négligé. \square

Exercice 2.6 (pendule physique). Estimez la correction aux paramètres des oscillations du pendule Foucault (exercice 2.4 et fig. 2b) apportée par la masse non-négligeable de sa corde de suspension, en sachant que $\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg/m}^3$.

Solution La masse de la corde relative à la masse de la balle est un paramètre petit $\epsilon = m_0/m = \mu l/m = \rho \pi r^2 l/m$ de valeur ≈ 0.132 . En tenant compte de la corde, le moment d'inertie du pendule et le moment des forces sont respectivement

$$I = ml^2 + \int_0^l \mu dr r^2 = ml^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) \quad \text{et} \quad M = -mgl \sin \varphi - \int_0^l \mu dr gr \sin \varphi = -mgl \sin \varphi \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

La 2me loi de Newton pour une toupie physique $I \ddot{\varphi} = M$ donne un facteur de correction $(1 + \epsilon/12)$ à ω_0 . \square

Bobbing buoy

Exercice 2.7 (la bouée sautillant). Une bouée flotte sur l'eau calme. Elle consiste d'une large masse m restant entièrement immergée sous l'eau et d'un tuyau cylindrique vertical attachée à la masse, vidé, enfermé, et sortant d'eau. L'aire de la section du tuyau est de S [m²], la densité de l'eau $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ égale à 1 [kg/L]. On ignore les frottements et la masse de tuyau. Au moment $t = 0$, la bouée est légèrement enfoncée dans l'eau de δ par rapport à son position d'équilibre et relâchée. Trouver la période des oscillations et la solution complète pour le mouvement de la bouée.

Exercice 2.8 (le ballon sautillant). Remplacer la bouée dans l'exercice 2.7 par un ballon de foot de rayon R et masse m dont la partie submergée à l'équilibre est de profondeur $d < R$ (fig. 3a). Trouver d , la période, et la solution complète.

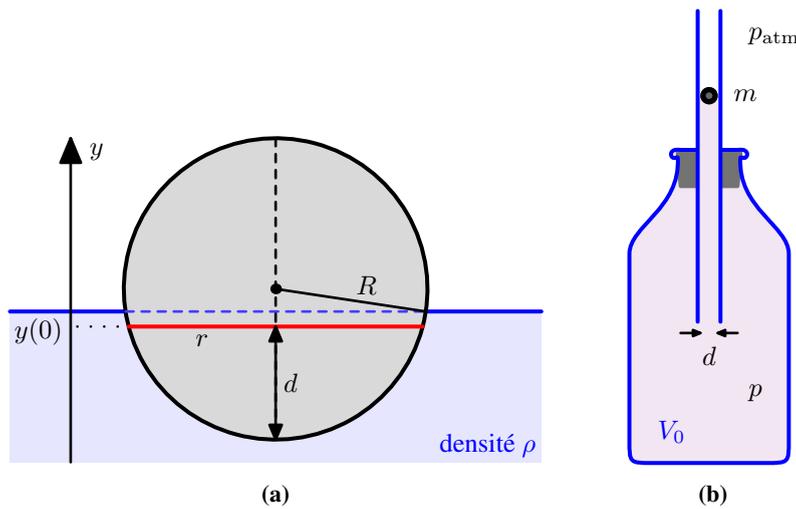


FIG. 3 – (a) Le ballon sautillant dans l'eau au moment $t = 0$, voir exercice 2.8; (b) experience de Rüchardt.

Solution On choisit l'axe verticale y avec l'origine à la surface d'eau et la coordonnée y donnant la position de la ligne de flottaison (*waterline*). Soit V_0 le volume submergé sous l'eau à l'équilibre $y = 0$. Quand la bouée ou le ballon sortent de l'eau, donc si $y > 0$, ce volume et la force d'Archimède diminuent. On somme les forces agissant sur la bouée ou le ballon et applique la 2me loi de Newton. Pour la bouée cela donne immédiatement

$$-mg + \rho g V(y) = -mg + \rho g V_0 - \rho g S y = -\rho g S y = m \ddot{y}, \quad \text{d'où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

Dans le cas du ballon, on peut exprimer d en sachant que à l'équilibre la somme des forces est nul

$$-mg + \rho g V_0 = 0 \quad \text{avec} \quad V_0 = \pi \int_0^d (R^2 - (R-z)^2) dz = \pi d^2 \left(R - \frac{d}{3}\right),$$

mais cela nécessite une analyse des racines d'une équation cubique. Ainsi dans le cas $R \gg 1$ on trouve $d \approx m^{1/2} (\pi \rho R)^{-1/2}$ et on continue la même racine. Par la suite, on cherche à exprimer le volume submergé en fonction de y

$$V(y) - V_0 = \int_y^0 S(y) dy = \pi \int_y^0 \rho(y)^2 dy = \pi \int_y^0 (R^2 - (R - (d - y))^2) dy.$$

Strictement dit, les oscillations du ballon ne sont pas harmoniques. Dans l'approximation $y \ll d < R$ on obtient

$$m \ddot{y} = \rho g (V(y) - V_0) \approx -\rho g \pi d (2R - d) y \quad \text{et par conséquent} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g \pi r^2}{m}} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{d(2R - d)}$$

Exercice 2.9. Considérez l'expérience de Rüchardt¹ permettant de mesurer la constante adiabatique κ du gaz dans la bouteille (fig. 3b) de volume $V_0 \gg \frac{1}{4}\pi d^2 \Delta y$. Expliquez l'analogie et la différence avec l'exercice 2.8. Dans l'hypothèse d'un procès adiabatique et sans frottements (cf. sec. 8.1.2), exprimez la force de rappel et trouvez la pulsation propre ω_0 .

3 Oscillateur harmonique libre amorti

3.1 Cours

- Questionnaire éclair : forme matricielle (15 min)
- Récapitulatif sur la représentation matricielle
- Notions de la mécanique Lagrangienne et Hamiltonienne
- Pertes, introduction de friction
- Equation différentielle et sa solution formelle

3.1.1 L'équation et sa solution générale

On considère l'équation de 2ème ordre de forme plus générale

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{et} \quad \gamma := \frac{\omega_0}{2Q}$$

sont appelés, respectivement, *facteur de qualité* et constante de l'*amortissement*. On considère $u = (u_1, u_2)$ et on assume que $u_1 := x$ et $u_2 := \dot{x}$. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\omega_0^2 u_1 - \frac{\omega_0}{Q} u_2 \end{aligned} \Rightarrow \dot{u} = Au \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0/Q \end{pmatrix}$$

On cherche les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ de la matrice A .

$$\det(A - \lambda) = \lambda(\lambda + \omega_0/Q) + \omega_0^2 = 0, \quad \text{avec} \quad \sqrt{D} = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$$

et par conséquent,

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \left[\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q} \right]$$

| Régime | Qualité | valeurs propres de A | Solution $x(t)$ |
|--------------|-----------------------|--|--|
| apériodique | $0 < Q < \frac{1}{2}$ | $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}_{<0}$ | $c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$ |
| critique | $Q = \frac{1}{2}$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0 \in \mathbb{R}_{<0}$ | $(c_1 + c_2 t) \exp(-\omega_0 t)$ |
| oscillatoire | $Q > \frac{1}{2}$ | $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ | $\exp(-\gamma t)(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$ |
| non-amorti | $Q = \infty$ | $i\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ | $c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$ |

3.1.2 Régime oscillatoire, quasi-période

Dans la solution générale on assume $c_1 = 0$ et on cherche les maximums de la fonction

$$x(t) = \exp(-\gamma t) \sin \omega t$$

La condition pour les points critiques est

$$\dot{x} = \exp(-\gamma t) [-\gamma \sin \omega t + \omega \cos \omega t] = 0 \Rightarrow \omega \cos \omega t - \gamma \sin \omega t = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \phi) = 0, \quad \text{où} \quad \tan \phi = \gamma/\omega.$$

La solution générale (pour les maximums et les minimums) est

$$\omega t_k + \phi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La quasi-période est donnée par la condition

$$T_k = t_{k+1} - t_{k-1} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Notez (développement limité au voisinage $\gamma \ll \omega_0$) que

$$\omega \approx \omega_0 - \gamma/2 \quad \text{et} \quad \phi \approx \gamma/\omega_0$$

¹voir E. Rüchardt, Eine einfache Methode zur Bestimmung von C_p/C_v , Physikalische Zeitschrift, **30** 58–59 (1929), et la méthode modifiée de W. F. Koehler, A Laboratory experiment on the determination of γ for gases by self-sustained oscillations, Am. J. Phys. **19**, 113 (1951).

3.2 TD autres problèmes de oscillations mécaniques libres

- disque, torsion, à suivre dans la sec. 4.3.1
- deux ressorts en séquence ou en parallèle
- molécule diatomique, à suivre dans la sec. 5.1

3.3 TD oscillations amorties

Exercice 3.1. Obtenez les expressions pour t_k et déphasage ϕ . Ce dernier est appelé aussi retardement. Pourquoi ?

Exercice 3.2. Considérez la solution générale pour un oscillateur harmonique libre amorti le long de l'axe x de pulsation ω_0 et amortissement $\gamma < \omega_0$. Trouvez les solutions particulières dans les cas : (a) $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$; (b) $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$; (c) le cas général $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 < 0$. Dans chaque cas, essayez d'abord $\gamma = 0$ avant de le généraliser pour $\gamma \neq 0$. Montrez les différentes conditions initiales sur la trajectoire dans l'espace des phases.

3.3.1 Les amortisseurs

L'amortisseur d'une voiture est typiquement construit en utilisant un cylindre étanche rempli de huile. Un piston percé actionné par un ressort de suspension se déplace dans le cylindre (voir la figure 4). Le huile circulant à travers le piston freine ce dernier et, par conséquent, amortit les mouvements de suspension.

Exercice 3.3 (réglage d'un amortisseur). Afin d'étudier ce dispositif, il est fixé verticalement sur un support ferme. Son ressort est de rigidité k et de longueur l_0 . Une masse m est attachée à son extrémité libre (en haut) pour modéliser la voiture. Les masses du ressort et du piston sont négligeables. Exprimez le coefficient de l'amortissement γ et la qualité Q en utilisant le coefficient $\tau > 0$ de la force de frottements. Quelles valeurs de γ et Q sont souhaitables dans ce cas ? Argumentez votre réponse. On comprime l'amortisseur et puis le relâche brusquement au temps $t = 0$. Décrivez le déplacement du piston pour $t > 0$.

Consignes pour la solution de l'exercice 3.3 Il y a un seul degré de liberté. Le piston se déplace le long de l'axe vertical qu'on choisit pointé vers le haut. Si nous utilisons la coordonnée x pour représenter le décalage du piston par rapport à sa position de l'équilibre, au moment $t = 0$ nous avons les conditions initiales $x(0) < 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ nous permettant de déterminer les deux constantes $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ dans la solution générale

$$x(t) = c_1 \exp(\lambda_- t) + c_2 \exp(\lambda_+ t).$$

Après le relâchement, un bon amortisseur est sensé de diminuer, voir supprimer entièrement les oscillations. Cela signifie

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}_{<0}, \text{ ou plus précisément } \lambda_- \leq \lambda_+ < 0.$$

Pour $t = 0$, vous avez à satisfaire $c_1 + c_2 = x(0) < 0$ et $c_1 \lambda_- + c_2 \lambda_+ = 0$. Apres votre analyse, tracez la courbe $x(t)$.

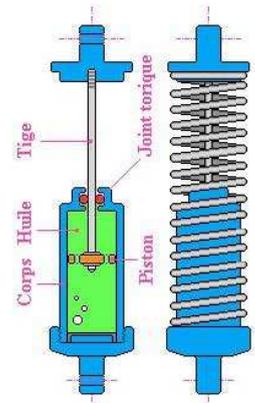


FIG. 4 – Amortisseur

4 Oscillateur harmonique amorti forcé

4.1 Cours

- Questionnaire éclair : forme de la solution avec différents λ
- Récapitulatif sur oscillateur harmonique libre amorti, diagramme de phase
- Équation différentielle avec la force harmonique, solution
- Résonance

Exercice 4.1 (régime sinusoïdal). Pourquoi le régime forcé avec une force harmonique $\propto \sin \Omega t$ est tellement important ? Donnez au moins *trois raisons* pourquoi nous utilisons l'électricité au courant alternatif (AC). Aide : analyser la production, la transportation, et la conversion.

4.1.1 Force harmonique

On considère l'équation différentielle ordinaire nonhomogène de 2^e ordre²

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t, \quad (4.1)$$

Exercice 4.2 (fréquences dangereuses). Une voiture de entre axe $L = 5\text{m}$ est conçue pour passer sur un obstacle de l'hauteur $h = 0.2\text{m}$ avec une vitesse entre 60 et 100 km/h. Quelle fréquence externe Ω doit on anticiper pour régler ses amortisseurs ? Quelle sera l'amplitude a_0 ?

On considère $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et on assume que $u_1 := x, u_2 := \dot{x}, u_3 := \cos \Omega t$, et $u_4 := \sin \Omega t$. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\omega_0^2 u_1 - \frac{\omega_0}{Q} u_2 + a_0 u_3 \\ \dot{u}_3 &= -\Omega u_4 \\ \dot{u}_4 &= \Omega u_3 \end{aligned} \Rightarrow \dot{u} = Au \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0/Q & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & \Omega & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ et $\lambda_{3,4}$ de la matrice A . L'équation séculaire est

$$\det(A - \lambda \cdot 1_4) = (\lambda^2 + \Omega^2)(\lambda^2 + \lambda\omega_0/Q + \omega_0^2) = 0.$$

Notez que $A = \text{diag}(A_1, A_2) + A_0$ où A_1 décrit notre système (libre, sans force), A_2 décrit le système externe (force), et A_0 , une matrice nilpotente, donne le *couplage* entre ces deux systèmes. Notez aussi que

$$\det(A - \lambda \cdot 1) = \det(A_1 - \lambda \cdot 1_2) \det(A_2 - \lambda \cdot 1_2).$$

Les solutions sont

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \left[\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q} \right], \quad \lambda_{3,4} = \pm i\Omega$$

4.1.2 Amplitude & phase en régime stationnaire

Considérez la solution particulière (générale pour $t \rightarrow \infty$)

$$x(t) = a_+ \exp(i\Omega t) + a_- \exp(-i\Omega t)$$

correspondant aux valeurs propres $\lambda_{3,4}$ où a_{\pm} ne dépendent du temps. Pour trouver a_{\pm} on calcule

$$\dot{x} = ia_+ \Omega \exp(i\Omega t) - ia_- \Omega \exp(-i\Omega t) \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -a_+ \Omega^2 \exp(i\Omega t) - a_- \Omega^2 \exp(-i\Omega t),$$

et les substitue dans l'équation (4.1). En supposant que les coefficients devant $\exp(\pm i\Omega t)$ doivent être nuls, on obtient

$$a_- = \bar{a}_+ = \frac{1}{2} a_0 \bar{a} \quad \text{et} \quad -a\Omega^2 + 2a\gamma\Omega i + \omega_0^2 a - a_0 = 0,$$

et par conséquent

$$a = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\gamma\Omega i} = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\gamma\Omega i}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}$$

On trouve l'amplitude et la phase

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg a = -\arctan \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

respectivement, et exprime la solution

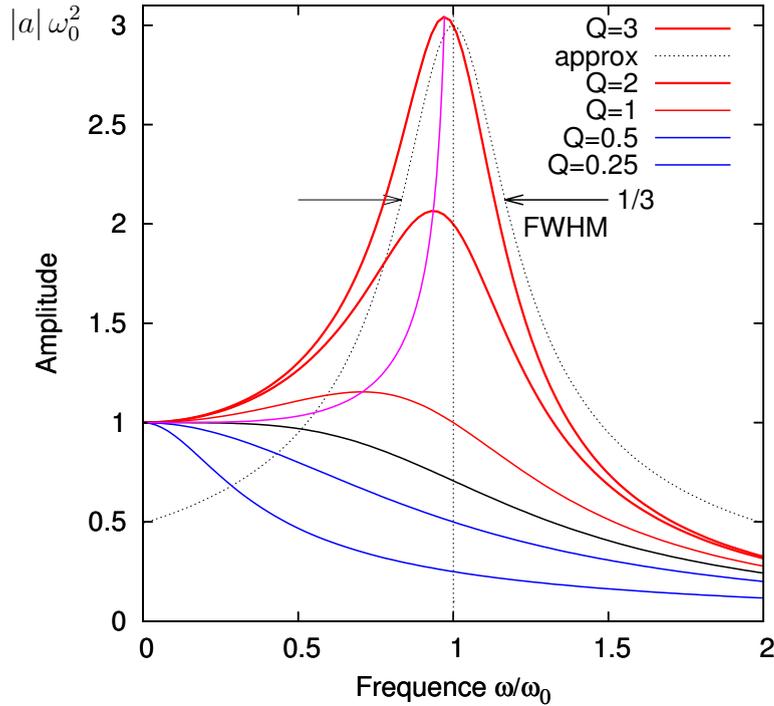
$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 |a| (\exp(i(\Omega t + \varphi)) + \exp(-i(\Omega t + \varphi))) = a_0 |a| \cos(\Omega t + \varphi)$$

²A retenir la terminologie anglaise : γ damping coefficient, ω_0 natural frequency (eigenfrequency), Ω input (driving) frequency

Exercice 4.3. Tracez $|a|$ et φ dans la sec. 4.1.2 en fonction de $\delta = \Omega/\omega_0$ pour différents valeurs de $Q = \omega_0/(2\gamma)$. Trouvez Ω pour laquelle $|a|$ devient maximale et, en simplifiant pour le cas $Q \gg 1$, trouvez la valeur $\max(|a|)$ correspondant. Pour quelle(s) valeur(s) de δ la valeur de $|a|^2$ (intensité ou puissance) est diminuée à la moitié de sa valeur maximale ?

Solution de l'exercice 4.3 On exprime $|a|$ en fonction de δ

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \omega_0^2 \Omega^2 / Q^2}} = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \delta^2 / Q^2}}, \quad \text{telle que } |a| \omega_0^2|_{\Omega=0} = 1 \text{ et } |a| \omega_0^2|_{\Omega=\omega_0} = Q,$$

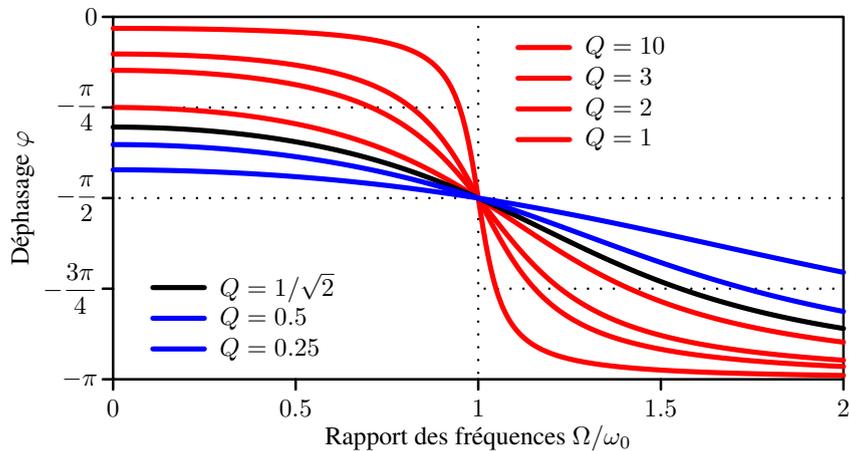


et calcule la dérivée $|a|' = d|a|/d\delta$. En solvant $|a|' = 0$ pour δ on obtient

$$\delta_{\max} = \sqrt{1 - 1/(2Q^2)} \approx 1 - 1/(2Q)^2 + \dots, \quad \text{et} \quad \max(|a|) \omega_0^2 = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \approx Q + \dots$$

Notez que le maximum à $\delta_{\max} > 0$ n'existe que pour $Q > 2^{-1/2}$. Le déphasage $\varphi(\delta, Q)$ est donné par

$$\varphi = -\arctan \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \arctan \frac{1}{Q(\delta^2 - 1)}$$



On constate que $\varphi = 0$ pour $\Omega = 0$ (force constante). Effectivement, dans ce cas, la solution stationnaire est la solution particulière constante $x(t) = a \cos(\Omega t + \varphi) = a_0 \omega_0^{-2}$ avec x décalé par rapport à sa position d'équilibre libre. Enfin, l'équation $2|a(\delta)|^2 = |a|_{\max}^2$ possède deux solutions $\delta_{1,2}$ telles que

$$|\delta_{1,2} - \delta_{\max}| = \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2} \xrightarrow{Q \gg 1} \frac{1}{Q}, \quad |\delta_1 - \delta_2| = \Delta\delta \xrightarrow{Q \gg 1} \frac{2}{Q} = \frac{2\gamma}{\omega_0} \quad \text{et donc} \quad \Delta\Omega = 2\gamma \text{ pour } Q \gg 1. \quad \square$$

4.1.3 Largeur de la résonance. Courbe de Lorentz

La quantité $\Delta\delta = \Delta\Omega/\omega_0$ trouvée dans l'exercice 4.3 est appelée *largeur de la résonance*. Dans le cas de l'amortissement faible avec $Q \gg 1$, la largeur est approximativement $2Q^{-1}$ devenant 0 pour $Q \rightarrow \infty$. Par ailleurs, dans ce cas, la forme de la courbe de résonance $|a(\delta)|$ au voisinage de la résonance $\delta_{\max} \approx 1$ devient

$$\frac{|a(\delta)|}{|a(1)|} = |a(\delta)| \frac{\omega_0^2}{Q} \xrightarrow{Q \gg 1, \delta \rightarrow 1} \frac{1}{2Q\sqrt{(\delta-1)^2 + (2Q)^{-2}}} = \frac{\omega_0}{2Q\sqrt{(\Omega-\omega_0)^2 + \gamma^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\Omega-\omega_0)^2 + \gamma^2}}.$$

Démonstration. Utilisez l'expression obtenue dans l'exercice 4.3 et $1 - \delta^2 = (1 - \delta)(1 + \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 1} 2(1 - \delta)$. □

Ainsi l'intensité (aka puissance ou énergie) des oscillations stationnaires est représentée par la *fonction de Lorentz* $L(\Omega)$

$$|a(\delta)|^2 \xrightarrow{Q \gg 1} Q^2 \frac{\gamma^2}{(\Omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} = \pi \frac{\omega_0^2}{4\gamma} L(\Omega), \quad \text{où } L(\Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\Omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \text{ avec } \int_{-\infty}^{\infty} L(\Omega) d\Omega = 1.$$

Cette fonction est maximale à $\Omega = \omega_0$ (résonance) avec une valeur de $\gamma\pi^{-1}$. Sa largeur à la mi-hauteur³ égale 2γ (vérifiez). Notez que $\Delta\delta = 1/3$ pour l'approximation Lorentzienne avec $Q = 3$ tracée dans la figure de l'exercice 4.3. La fonction $L(\Omega)$ est connue pour décrire la forme de certains types de lignes spectrales et pour définir la distribution de Cauchy.

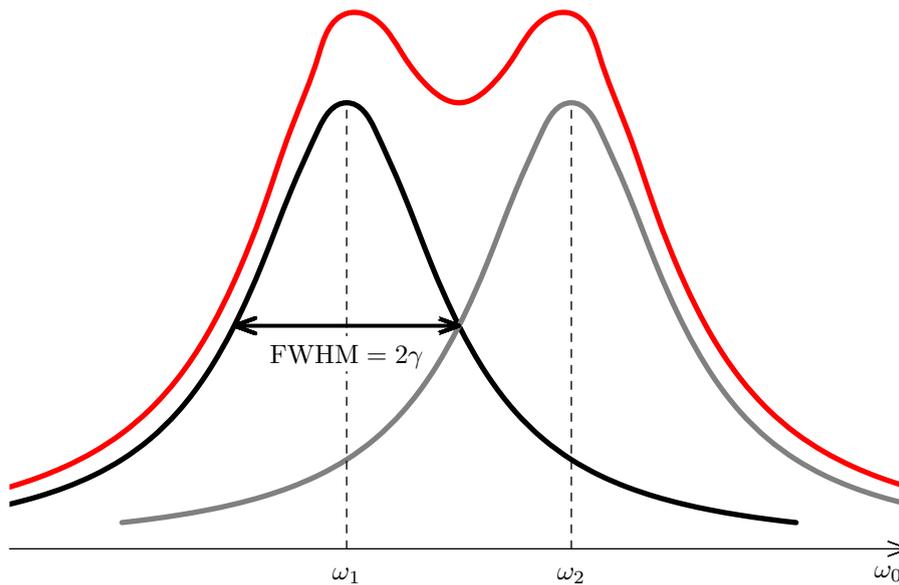
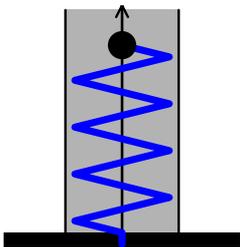


FIG. 5 – Réponse d'un récepteur radio, voir l'exercice 4.4, à deux stations de fréquences ω_1 et ω_2 (aka «deux résonances»)

Exercice 4.4. On construit un récepteur radio. Proposez un schéma et expliquez le principe. S'agit-il d'un système (oscillateur) libre ou forcé ? Quel régime (apériodique ou oscillatoire) doit on chercher à atteindre ? Pourquoi ? En recevant en même temps les deux stations radio de fréquences f_1 et f_2 et d'intensités égales $I_1 = I_2$, on considère que l'une est distinguée de l'autre si le rapport de carrés des amplitudes respectives A_1 et A_2 des signaux de la réponse du récepteur est supérieur à 2:1. Quelle est $\Delta f = |f_1 - f_2|$ minimale pour laquelle votre récepteur permettra de distinguer ces stations ?



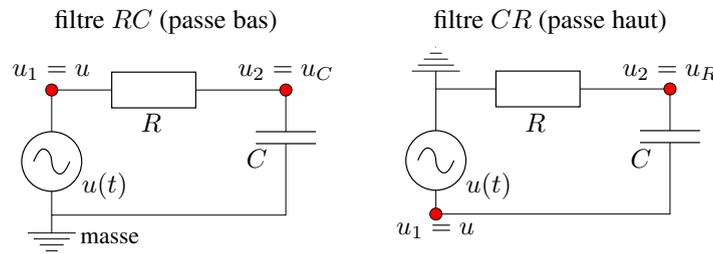
Seismographe : Afin d'enregistrer les tremblements de Terre dans un petit intervalle des fréquences $f_c \pm \delta$ où $f_c \gg \delta > 0$ est une fréquence caractéristique, on peut utiliser un ressort (sans masse) d'une rigidité k et un objet sphérique d'une masse m . Le ressort est monté verticalement sur la surface de la Terre et la masse est placée au dessus (voir la figure). La masse peut donc se déplacer le long de la direction verticale (z). On place tout dans un cylindre rempli d'un milieu visqueux (l'eau, glycérol, huile, etc) donnant au système un amortissement d'un coefficient $\gamma > 0$. On observe les oscillations de m par rapport au cylindre et on mesure leurs amplitude A et fréquence f .

Exercice 4.5. Quel type de mouvement cible-t-on à observer ? Suivant votre réponse, proposez les valeurs de k , m , et γ . Comparez au système dans l'exercice 3.3. Trouvez la position de l'équilibre du système z_0 en sachant que la longueur du ressort libre est ℓ . La Terre commence à trembler en produisant des oscillations sinusoïdales de la fréquence f_c et d'une petite amplitude A_0 . Donnez l'équation de mouvement. Si $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$, trouvez sa solution $z(t)$.

³en anglais on dit *full width at half-maximum* abrégée FWHM ; on utilis également *half width* HWHM=FWHM/2.

4.2 TD : Circuits électriques en régime sinusoïdal

Filtres CR et RC en régime sinusoïdal. Considérez les deux circuits ci-dessous.



Dans chaque cas, les repères u_1 dit *entrée du filtre* et u_2 dit *sortie du filtre* indiquent le branchement des deux voies de l'oscilloscope (voir les TP de 2ème année). On remarque, que dans les deux cas $u_1 = u(t)$, la tension à la sortie de la source (par ex., générateur des fréquences). Notons aussi, que dans le cas du circuit RC on observe $u_2 = u_C$, la tension aux bornes du condensateur C , tandis que pour CR on observe $u_2 = u_R$, la tension aux bornes de la résistance ohmique R .

Exercice 4.6. Peut-on mesurer directement (par ex., avec un oscilloscope) la tension u_R (u_C) dans le cas du circuit RC (CR) ? Pourquoi ? Expliquez le règle des masses.

On considère le cas de la tension d'entrée $u(t) = U \sin \Omega t$ sinusoïdale purement alternative ($U_0 = 0$) de pulsation Ω , amplitude U et phase $\varphi_0 = 0$. On utilise la loi des mailles pour les tensions u_R et u_C aux bornes de la résistance R et le condensateur C branchés en série, la loi d'Ohm pour R , la relation entre la charge Q et la tension u_C , et enfin la définition du courant j pour obtenir le système des équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = U \sin \Omega t, \quad u(t) = u_R(t) + u_C(t), \quad u_R(t) = Rj(t), \quad u_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad j(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q} \end{array} \right\}. \quad (4.2a)$$

Exercice 4.7. Peut-on visualiser la tension u_R (u_C) dans le cas du circuit RC (CR) en utilisant un oscilloscope à deux voies avec la possibilité d'ajouter les voies ? Comment ? Expliquez la loi des mailles.

On cherche la tension $u_R(t)$ pour laquelle on obtient l'équation différentielle

$$\dot{u}_R + \frac{u_R}{RC} - U\Omega \cos \Omega t = 0 \quad (4.2b)$$

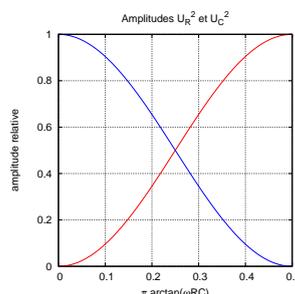
Démonstration. On dérive la première, la deuxième et l'avant dernière équation dans (4.2a)

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = U\Omega \cos \Omega t, \quad \dot{u} = \dot{u}_R + \dot{u}_C, \quad \frac{du_C}{dt} = \dot{u}_C = \frac{\dot{Q}}{C}.$$

Par la suite, on résout le système des équations linéaires pour se débarrasser de tous les fonctions, telles que $u_C(t)$, $\dot{u}_C(t)$, $j(t)$, etc, qui nous n'intéressent pas. \square

La solution $u_R(t)$ de (4.2b) est

$$u_R(t) = U_R \sin(\Omega t + \varphi_R), \quad U_R = \frac{U}{\Delta_\Omega}, \quad \Delta_\Omega = \sqrt{1 + \frac{1}{(\Omega RC)^2}}, \quad \tan \varphi_R = \frac{1}{\Omega RC}, \quad \cos \varphi_R = \frac{1}{\Delta_\Omega}. \quad (4.2c)$$



En utilisant cette solution et la loi de mailles dans (4.2a) on obtient

$$u_C(t) = U_C \sin(\Omega t + \varphi_C), \quad U_C = \frac{U}{\Delta_\Omega \Omega RC}, \quad \varphi_C = \varphi_R - \frac{1}{2}\pi, \quad \tan \varphi_C = -\Omega RC. \quad (4.2d)$$

Exercice 4.8. Vérifiez la loi des mailles $u = u_R + u_C$ pour (4.2c) et (4.2d). Vérifiez que (4.2c) est vraiment la solution de (4.2b). Expliquez comment on peut trouver les expressions pour Δ_Ω , φ_R , et U_R à partir de l'équation (4.2b) et la forme générale $U_R \sin(\Omega t + \varphi_R)$ de sa solution.

Exercice 4.9. En utilisant (4.2c) trouvez les limites de Δ_Ω pour $\Omega \rightarrow 0_+$ et $\Omega = \infty$. En utilisant vos résultats et (4.2d) trouvez les mêmes limites de $U_C(\Omega)$. Dessinez les fonctions de *gain* $U_R(\Omega)/U$ et $U_C(\Omega)/U$. Quelle est leur valeur dans $\Omega = (RC)^{-1}$? Expliquez pourquoi RC est un filtre passe bas, et CR est un filtre passe haut.

Exercice 4.10. Comparez le *déphasage* φ_R et φ_C de tensions $u_R(t)$ et $u_C(t)$. Présentez les sur la diagramme des phases. Quelle tension est en avance par rapport à $u(t)$, quelle est en retard?

Filtre RLC série en régime sinusoïdal.

Exercice 4.11. Montrez que pour un filtre RLC série en régime sinusoïdal, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $2\gamma = R/L$.

Filtre RLC parallèle en régime sinusoïdal.

Exercice 4.12. Montrez que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et que $2\gamma = 1/(RC)$.

4.3 TD : prepa DS «Vibrations»

Exercice 4.13. Une masse ponctuelle m attachée au ressort de rigidité k obtient une vitesse initiale v_0 ; la déformation initiale du ressort est x_0 . Trouvez l'amplitude des vibrations. Trouvez la déformation dans $t = T$. Prenez valeurs numériques $m = 100\text{g}$, $k = 10\text{N/m}$, $v_0 = 1\text{m/sec}$, et $T = 1\text{sec}$.

Exercice 4.14. Une pendule de longueur $l = 5\text{ m}$ fait des petites oscillations. Après 100 périodes, son amplitude s'est diminuée par deux fois. Trouvez γ et qualité Q .

Exercice 4.15. Appareillage scientifique est placé sur une plateforme amortisseur des vibrations posée au plancher. Le plancher vibre avec fréquence $f = 20\text{ Hz}$ et amplitude A . La fréquence propre de l'appareil sur l'amortisseur est $f_0 = 20\text{ Hz}$, l'amplitude de ses vibrations est a . Trouvez la valeur *maximale* du rapport de A et a .

Exercice 4.16. Soit x la coordonnée d'un oscillateur harmonique non-amorti. Trouvez l'expression pour $x(t)$ si la force extérieure est $F(t) = 0$ pour $t \notin [0, T]$, $F(t) = F_0$ pour $t \in [0, T]$. Donnez la condition pour retrouver l'oscillateur à son équilibre $\dot{x} = x = 0$ pour $t > T$.

Exercice 4.17. Trouvez l'amplitude et la phase d'un oscillateur harmonique non-amorti étant à son équilibre à $t = 0$. La force extérieure est $F(t) = 0$ pour $t \notin [0, T]$, $F(t) = \xi t$ pour $t \in [0, T]$.

Exercice 4.18. Considérez la solution particulière de l'équation (4.1) sous forme

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.3)$$

et retrouvez les expressions pour l'amplitude A et le déphasage φ obtenus dans la section 4.1.2.

Solution de l'exercice 4.18 : On compute les dérivées de $x(t)$

$$\dot{x} = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -\Omega^2 x,$$

et les substitue dans l'équation (4.1) dont les termes se décomposent en utilisant

$$\cos(\Omega t + \varphi) = \cos(\Omega t) \cos \varphi - \sin(\Omega t) \sin \varphi \quad \text{et} \quad \sin(\Omega t + \varphi) = \cos(\Omega t) \sin \varphi + \sin(\Omega t) \cos \varphi.$$

En rassemblant les termes devant $\cos \Omega t$ et $\sin \Omega t$ le résultat s'écrit sous la forme

$$C_{\cos} \cos \Omega t + C_{\sin} \sin \Omega t = 0.$$

On conclut que la solution (pour tout t) n'est possible que dans le cas $C_{\cos} = C_{\sin} \equiv 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} (\omega_0 - \Omega) \cos \varphi - 2\gamma\Omega \sin \varphi &= X \cos(\alpha + \varphi) = a^{-1} && \text{avec } a = A/a_0 > 0, \\ (\omega_0 - \Omega) \sin \varphi + 2\gamma\Omega \cos \varphi &= X \sin(\alpha + \varphi) = 0 && \text{avec } X = [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2]^{1/2} > 0. \end{aligned}$$

La solution unique de ces équations est possible si $\sin(\alpha + \varphi) = 0$ et $\cos(\alpha + \varphi) = 1$, donc $\alpha + \varphi = 0$. \square

Exercice 4.19. Un oscillateur harmonique amorti selon x de pulsation propre ω_0 et coefficient d'amortissement $\gamma \ll \omega_0$ reste à son équilibre $x = 0$ pour $t \leq 0$. La force $F(t) = a_0 \sin \Omega t$ avec $\Omega = \omega_0$ apparaît au moment $t = 0$ et persiste pour tout $t \geq 0$. Trouvez la solution $x(t)$ et le temps τ auquel son amplitude achève la moitié de l'amplitude stationnaire A .

Recommandations pour l'exercice 4.19 : l'amplitude A et la phase φ de la solution stationnaire à $t \rightarrow +\infty$ sont obtenues dans la sec. 4.1.2 pour la force harmonique $\cos \Omega t$ dans l'eq. (4.1). On représente F sous forme requise en décalant t

$$F(t) = a_0 \sin \Omega t = a_0 \sin \Omega \left(t' - \frac{T}{4} \right) = a_0 \sin \left(\Omega t' - \frac{\pi}{2} \right) = a_0 \cos \Omega t' = F(t'), \quad t' \geq t_0 = \frac{T}{4} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Nous sommes en condition de résonance $\Omega = \omega_0$ où $A = a_0 (2\gamma\Omega)^{-1}$ et $\varphi = -\pi/2$. La solution générale s'écrit

$$x(t') \equiv 0 \text{ pour } t' \leq t_0 \quad \text{et} \quad x(t') = A'_0 \exp(-\gamma t') \cos(\omega t' + \varphi'_0) + A \cos(\Omega t' + \varphi) \text{ pour } t' \geq t_0,$$

où $\omega \approx \omega_0$. En revenant au temps $t = t' - t_0$, cette même solution devient

$$x(t) \equiv 0 \text{ pour } t \leq 0 \quad \text{et} \quad x(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos \Omega t \text{ pour } t \geq 0,$$

avec $A_0 = A'_0 \exp(-\gamma t_0)$ et $\varphi_0 = \varphi'_0 + \omega t_0 = \varphi'_0 + \omega_0 t_0 + \delta \approx \varphi'_0 + \pi/2$.

Pour assurer la continuité, il faut «racoller» les deux parties de cette solution en satisfaisant $x = \dot{x} = 0$ à $t = 0$. □

4.3.1 Pendule de Pohl

Considérez le TP qu'on fait parfois en mécanique (voir la photo) et en capes. On trouve ce système dans les montres mécaniques. Il est constitué d'un disque dont la rotation libre autour de son centre est empêchée par un ressort spiral qui tend à ramener le disque vers sa position d'équilibre. Un petit rouleau de rayon r , entraîné par un moteur à une fréquence de rotation réglable Ω est relié au ressort spiral, lui donnant un déplacement angulaire qui force les oscillations du disque. Le disque peut être freiné pour contrôler l'effet d'amortissement. Il s'agit d'un frein électromagnétique sans contact exploitant les courants de Foucault. Le coefficient de freinage est λ . Deux bras relie le ressort au rouleau. Le bras quasi-horizontale de longueur L est attaché au rouleau, celui attaché au ressort reste quasi-vertical et son longueur l est comparable à L . Pour assurer que les déformations du ressort restent petites, on garde $r \ll l \sim L$.



Pendule de Pohl

Exercice 4.20 (Pendule de Pohl). Soit φ et ϑ sont les angles donnant, respectivement, les positions du disque de pendule et du rouleau de moteur par rapport à leurs centres respectifs O et O' . Si $\theta(t) = \Omega t$, trouvez $\varphi(t)$. Vérifiez que $\varphi \ll \pi$. Pour simplifier vos calculs, considérez le cas particulier de $x_O - x_{O'} = L$ et $y_O - y_{O'} = l$ (voir le dessin).

Solution de l'exercice 4.20 Plaçons l'origine des coordonnées dans O' , prenons $Q = (X, Y)$ et $q = (x, y)$ comme coordonnées de deux bouts du bras horizontal (positions de charnières). On trouve

$$Q = (x_O, y_O) + l(\sin \varphi, -\cos \varphi) \quad \text{et} \quad q = r(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

La distance entre ces points est fixe et est égale à L , on impose donc la condition

$$\|Q - q\|^2 - L^2 = (x_O + l \sin \varphi - r \cos \vartheta)^2 + (y_O - l \cos \varphi - r \sin \vartheta)^2 = 0$$

donnant

$$y_O^2 + x_O^2 + r^2 + l^2 - L^2 + (-2r \sin \vartheta - 2l \cos \varphi) y_O + (2l \sin \varphi - 2r \cos \vartheta) x_O + 2lr \sin(\vartheta - \varphi) = 0.$$

On simplifie cette condition pour le cas particulier en supposant $Y_0 = l$, $X_0 = L$, et $r = \varepsilon L$

$$2l^2(1 - \cos \varphi) + 2Ll \sin \varphi + \varepsilon L(-2L \cos \vartheta + 2l(-\sin \vartheta + \sin(\theta - \varphi))) + \varepsilon^2 L^2 = 0,$$

et après le développement limité en φ au voisinage $\varphi = 0$ on obtient l'équation

$$+2lL\varphi - 2\varepsilon L(L - l\varphi) \cos \vartheta + \varepsilon^2 L^2 + O(\varphi^2) = 0.$$

(à cet ordre il suffit de substituer $\cos \varphi \approx 1$ et $\sin \varphi \approx \varphi$) dont la solution est

$$\varphi = \varepsilon \frac{L \cos \vartheta - \varepsilon/2}{1 - \varepsilon \cos \vartheta} \approx \frac{\varepsilon L}{l} \left(\cos \vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\vartheta + \dots \right).$$

On conclut qu'à son ordre principal ε , la petite déformation forcée du ressort

$$\varphi(t) = \frac{r}{l} \cos \Omega t + O(\varepsilon^2) \quad \text{où } r = \varepsilon L$$

est harmonique et proportionnelle au rapport $r/l \ll 1$. □

Exercice 4.21 (Pendule de Pohl). En appliquant la mécanique Newtonienne à un corps rigide en rotation autour de son axe O , obtenez l'équation de mouvement du pendule dans l'exercice 4.20 et donnez sa solution stationnaire à $t \rightarrow \infty$.

5 Vibrations nonlinéaires à un seul degré de liberté

Rappel : degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées nécessaires pour caractériser de façon non-ambiguë tout les configurations du système.

Exercice 5.1 (degrés de liberté vibrationnels). Considérez molécules (a) diatomique, (b) linéaire à 3 atomes comme CO_2 ou CH_2CH_2 , (c) nonlinéaire comme H_2O , C_6H_6 , etc. Dans chaque cas, quel est le nombre des degrés de liberté *vibrationnels* ? Proposez une formule générale en fonction de nombre des atomes.

Rappel : développement limité Un outil indispensable de simplification et de l'analyse local, e.g., au voisinage d'un équilibre stable (elliptique) du pendule. Dans sa forme la plus simple, il s'agit de la *formule de Newton–Leibnitz* :

$$f'(x) = df(x)/dx := \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2). \quad (5.1)$$

Plus généralement, les approximations successives en puissances de $(x - x_0)$ sont données par la *série de Taylor*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1}). \quad (5.2)$$

En particulier, si x_0 est un point d'équilibre, au voisinage de x_0 nous avons $f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$.

5.1 Molécule diatomique, potentiels empiriques

On caractérise les molécules diatomiques⁴ par leur distance interatomique d'équilibre r_e et leur énergie de dissociation D_e , voir quelques exemples ci-dessous⁵

| molécule | état | D_e (eV) | r_e (Å) | ν_0 (cm^{-1}) | molécule | état | D_e (eV) | r_e (Å) | ν_0 (cm^{-1}) |
|----------|----------|------------|-----------|------------------------------|---------------|--------------|------------|-----------|------------------------------|
| LiH | Σ | 2.47 | 1.596 | 1406 | H_2 | Σ_g | 4.5 | 0.741 | 4401 |
| CO | Σ | 11.2 | 1.128 | 2170 | N_2 | Σ_g | 9.8 | 1.098 | 2359 |
| HCl | Σ | 4.4 | 1.275 | 2991 | O_2 | $^3\Sigma_g$ | 5.2 | 1.208 | 1580 |
| HF | Σ | 5.8 | 0.917 | 4138 | F_2 | Σ_g | 1.6 | 1.412 | 917 |
| NO | Σ | 7.0 | 1.151 | 1904 | Cl_2 | Σ_g | 2.5 | 1.988 | 560 |

L'énergie totale ou l'hamiltonien est (ici μ est la masse réduite, voir problème de deux corps en cours de mécanique)

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(x), \quad \text{où } x = r - r_e, \quad \text{et } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

On représente $V(x)$ par différentes fonctions empiriques, parmi lesquelles le *potentiel de Morse*⁶

$$V_M(x) = D_e (1 - e^{-\alpha(x/r_e)})^2, \quad (5.3)$$

ou le *potentiel de Lennard-Jones*⁷ dit «6–12»

$$V_{LJ}(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}, \quad \text{avec } r = r_e + x, \quad (5.4)$$

ou encore le *potentiel de Kratzer*

$$V_K(r) = \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_1}{r} + a_0, \quad \text{avec } r = r_e + x. \quad (5.5)$$

sont les plus connus. Enfin, dans l'approximation *harmonique*, on utilise le potentiel quadratique

$$V_0(x) = \frac{k}{2} x^2, \quad k = d^2V/dx^2 \text{ dans } x = 0, \quad (5.6)$$

où k connu aussi comme k_0 ou k_{xx} est un appelé *constante de force harmonique*.

⁴Voir les cours de la mécanique classique et quantique

⁵ Huber, K. P. & Herzberg, G. (1979) *Molecular Spectra and Molecular Structure IV. Constants of Diatomic Molecules* (New York, Van Nostrand, Reinhold); <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/tables/diatomc.html>; *Computational Chemistry Comparison and Benchmark Database. Part XIII – Vibrations* (Aug. 2005) NIST Standard Reference Database 101, Release 12, <http://srdata.nist.gov/cccbdb/vibrations.asp>. Notez qu'en anglais r_e est appelé *equilibrium separation* ou *bond length*

⁶Morse, P. M. (1929) Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. *Phys. Rev.* **34**, 57–64.

⁷Lennard-Jones, J. E. (1931) Cohesion. *Proc. Phys. Soc.* **43**, 461–482.

En mécanique classique, on obtiens les équations hamiltoniennes du mouvement, un système des équations différentielles ordinaires d'ordre 1, pour les variables canoniques conjuguées x et p

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\mu}, \quad \frac{dp}{dt} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dV}{dx} = -F(x).$$

Pour passer en mécanique classique newtonienne, on observe que

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{\mu} = -\frac{1}{\mu} F(x),$$

et on considère donc $F(x)$ comme une force agissant sur la particule de masse μ .

Unités. On utilise le système des unités atomiques (u.a.) dans lequel $\hbar = 1$. L'u.a. d'énergie E_h , nommé Hartree, est égale à 2625.5 kJ/mol, 627.5 kcal/mol, 27.211 eV, ou 219474.6 cm^{-1} . Le cm^{-1} est utilisé souvent en spectroscopie pour exprimer les fréquences de vibration et/ou les énergies. Ainsi, pour obtenir la fréquence en Hz on multiplie par c en cm. L'u.a. de longueur a_0 , ou rayon de Bohr, est égale 0.529 177 210(2) Å. Les u.a. de masse et de charge sont, respectivement, la masse m_e et la charge e d'électron.

Exercice 5.2 (Choix de la fonction potentielle, calcul des paramètres). Trouvez les relations entre caractéristiques moléculaires r_e , D_e , et ω_0 , et les paramètres des fonctions potentielles V_M , V_{LJ} , et/ou V_K . Peut on reproduire correctement les trois caractéristiques ? Faites le calcul pour une molécule de votre choix. Pour les petits vibrations autour r_e , donnez une approximation polynomiale ; déterminez les constants de force harmonique k_{xx} et cubique k_{xxx} . Faites le dessin de différents fonctions potentielles et des approximations quadratique et cubique. Dessinez les trajectoires du système dans l'espace de phases (x, \dot{x}) comme les niveaux des valeurs constantes de H pour $V(x)$ et ses différentes approximations. Expliquez les différences. Que pouvez vous dire sur la vitesse d'avancement du système le long de la trajectoire (la vitesse de phase) ? Donnez un graphe qualitative de $t \mapsto x(t)$ pour $V_0(x)$ et $V(x)$. Commentez la différence.

5.2 Pendule plan à grande amplitude

Exercice 5.3. Retournez au pendule dans l'exercice 2.5 et prenez $m = 1$ et $\ell = g$. Donnez les termes nonlinéaires corrigeant l'approximation harmonique (exercice 2.4) pour son énergie et son équation de mouvement, cf. fig. 6.

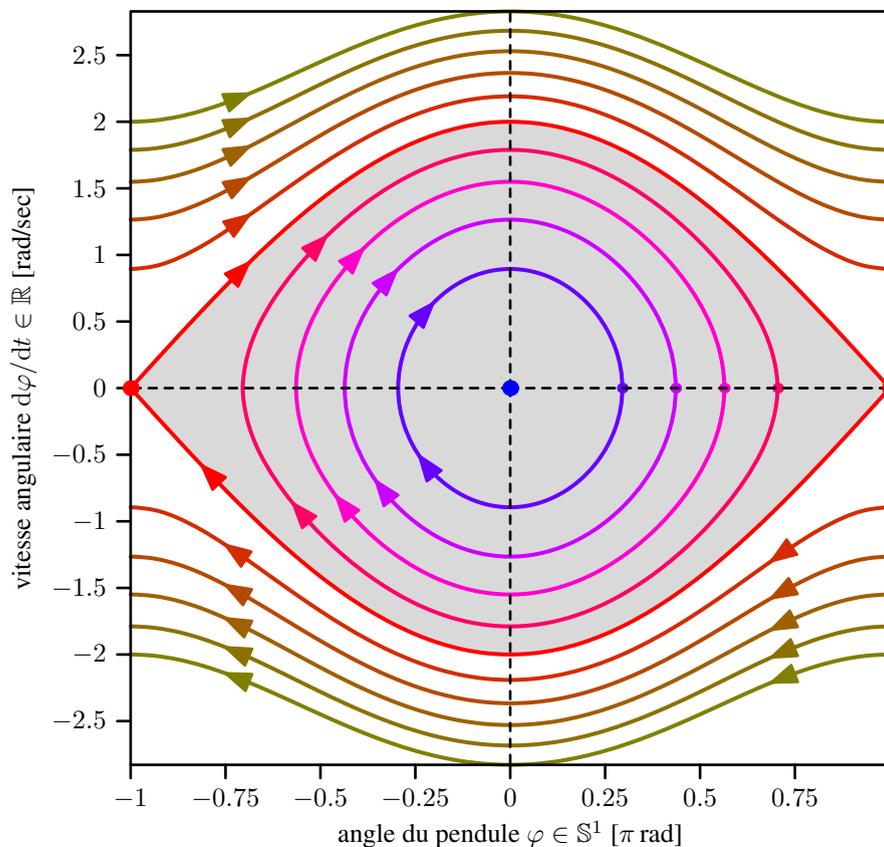


FIG. 6 – Les trajectoires du pendule (fig. 2c) dans son espace des phases $P = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$; la région en gris clair correspond aux vibrations.

6 Vibrations à plusieurs degrés de liberté

Exercice 6.1 (une chaîne de masses couplées). Considérez la chaîne dans la fig. 7 de n points matériels de masses m_i , $i = 1, \dots, n$, couplées par des ressorts de rigidités k_j , $j = 1, \dots, n + 1$. Les points peuvent se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal (axe x). A priori, les différentes masses et ressorts ne sont pas identiques. Quel est le nombre des degrés de liberté ? Proposez les coordonnées dans l'espace des configurations. Dessinez les forces agissant sur m_i .

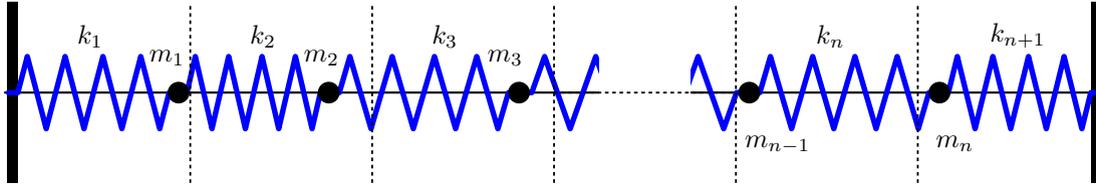


FIG. 7 – Une chaîne de points matériels dans \mathbb{R}^1 couplés par des ressorts.

Exercice 6.2 (molécule triatomique linéaire non-pliant). Quelles sont les vibrations de la molécule CO_2 ? Afin de modéliser ses vibrations d'élongation, considérez la chaîne de trois points matériels dans \mathbb{R}^1 avec $m_1 = m_3 = m_O$ et $m_2 = m_C$ couplés par deux ressorts de rigidité $k_1 = k_2 =: k$. Utilisez la mécanique newtonienne ou hamiltonienne pour obtenir les équations de mouvement. Ces équations, sont elles séparables ? Donnez leur solution, précisez les pulsations propres.

Solution de l'exercice 6.2 Soit x_1, x_2 , et x_3 les coordonnées des atomes O, C, et O de $\text{O}-\text{C}-\text{O}$, et p_1, p_2 , et p_3 les impulsions (quantités de mouvement) correspondant (conjugués). L'énergie totale

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{k}{2} [(r_1 - r_e)^2 + (r_2 - r_e)^2] = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{k}{2} [q_1^2 + q_2^2],$$

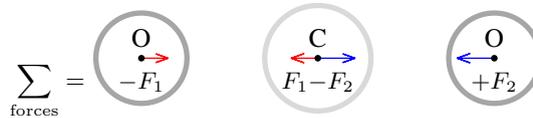
où r_e est la distance C–O à l'équilibre, et $r_1 = x_2 - x_1$ et $r_2 = x_3 - x_2$ sont les deux distances C–O instantanées, est conservée. Nous pouvons utiliser les équations de mouvement sous forme hamiltonienne (page 3) :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_O}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = k q_1, \quad \Rightarrow m_O \ddot{x}_1 = k q_1, \tag{6.1a}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_C}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -k q_1 + k q_2, \quad \Rightarrow m_C \ddot{x}_2 = -k (q_1 - q_2), \tag{6.1b}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_O}, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -k q_2. \quad \Rightarrow m_O \ddot{x}_3 = -k q_2. \tag{6.1c}$$

Autrement, les habitués de la mécanique newtonienne peuvent faire le bilan des forces pour chaque atome. Ainsi on considère l'action des forces $F_1 = -k q_1$ et $F_2 = -k q_2$ de «rappel» par les deux liens C–O sur les atomes 1, 2, et 3. Naturellement (par la 3me loi de Newton), les forces que le lien applique aux atomes liés sont opposées. Pour concrétiser, dessinons le cas avec les deux liens élongés, les q_i positifs, et, par conséquent, les F_i négatives, $i = 1, 2$ (voir ci-dessous).



La 2me loi de Newton nous donne les eqs. (6.1). Notons immédiatement que, conformément au principe de Galilée,

$$m_O \ddot{x}_1 + m_C \ddot{x}_2 + m_O \ddot{x}_3 = 0.$$

C'est à dire, le centre d'inertie («centre des masses») du système donné par

$$q_0 = m_O x_1 + m_C x_2 + m_O x_3 \tag{6.2a}$$

n'accélère pas. Les deux autres combinaisons indépendantes de (x_1, x_2, x_3) représentent les mouvements internes, donc les deux vibrations d'élongation. Ainsi, pour les combinaisons asymétrique (6.2b) et symétrique (6.2c)

$$q_- := q_1 - q_2 = r_1 - r_2 = 2x_2 - (x_1 + x_3) \tag{6.2b}$$

$$q_+ := -(q_1 + q_2) = 2r_e - r_1 - r_2 = 2r_e + (x_1 - x_3) \tag{6.2c}$$

nous obtenons les deux équations différentielles séparées (ou découplées)

$$\ddot{q}_+ + \frac{k}{m_O} q_+ = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{q}_- + k \frac{2m_O + m_C}{m_O m_C} q_- = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_-}{\omega_+} = \sqrt{1 + 2 \frac{m_O}{m_C}}. \tag{6.3}$$

On appelle de telles combinaisons les modes normaux, ou modes propres de vibration. On conclue⁸ que $\omega_-/\omega_+ \approx 1.9$.

⁸En réalité, les fréquences de vibrations d'élongation (dit *stretching* en anglais) de CO_2 sont de 2565 et 1480 cm^{-1} , avec le rapport de 1.7.

Exercice 6.3 (principe de symétrie). Quelle(s) est(sont) la(les) symétrie(s) du système dans l'exercice 6.2 (molécule O–C–O libre non-pliant) ? Quelles sont les propriétés de symétrie de q_{\pm} dans l'éq. (6.2) ? Y-a-t-il une relation avec la séparabilité des équations (6.3) ?

Solution de l'exercice 6.3. La symétrie de (la configuration de l'équilibre de) la molécule CO₂ consiste de la symétrie axiale de rotation R autour de son axe O–C–O et de la symétrie de permutation $P : (1, 2, 3) \mapsto (3, 2, 1)$ de deux atomes O. Cette dernière est pertinente à l'étude des modes normaux q_{\pm} . Ainsi on constate immédiatement que l'énergie H reste invariante sous l'action de P . Pour éliminer (= réduire) tout translations le long de l'axe x , on se place dans le système des coordonnées avec l'origine dans le centre des masses (6.2a). En d'autres mots, on fixe q_0 et p_0 à 0. Vu que $\ddot{q}_0 = 0$, ce système est inertielle, et par le principe de Galilée, les lois de la mécanique n'y changent pas. Notons, que le centre des masses de la configuration de l'équilibre de O–C–O se trouve à l'origine $x = 0$ et coïncide avec la position de l'équilibre⁹ de C. Par ailleurs, cette configuration et le système dynamique correspondant sont symétriques par rapport à la réflexion⁹ $\sigma : x \mapsto -x$ de l'axe x . L'analyse des symétries P et σ se simplifie d'avantage en termes de petites déplacements d_i des atomes $i = 1, 2, 3$ autour de leurs positions d'équilibre respectives. En particulier, dans notre système des coordonnées liées au centre des masses, l'atome C ne se déplace que légèrement autour de l'origine. On conclut que dans ce système

$$x_1 = -r_e + d_1, \quad x_2 = d_2, \quad \text{et} \quad x_3 = r_e + d_3, \quad \text{ainsi que} \quad r_1 = r_e + d_2 - d_1 \quad \text{et} \quad r_2 = r_e + d_3 - d_2, \quad (6.4)$$

et en utilisant (6.2), on exprime immédiatement

$$q_0 = m_O d_1 + m_C d_2 + m_O d_3 \equiv 0 \quad \text{dans le référentiel de centre d'inertie,} \quad (6.5a)$$

$$q_- = 2 d_2 - (d_1 + d_3), \quad \begin{array}{ccc} \text{O} & \text{C} & \text{O} \\ \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \end{array} \quad (6.5b)$$

$$q_+ = d_1 - d_3. \quad \begin{array}{ccc} \text{O} & \text{C} & \text{O} \\ \rightarrow & \cdot & \leftarrow \end{array} \quad (6.5c)$$

Notez que sur les dessins (6.5b) et (6.5c) ci-dessus, les déplacements d_i , qui composent les modes normaux respectives q_- et q_+ , sont représentés par des petits vecteurs dont les normes relatives respectent (6.5a). Sous la réflexion σ , ces déplacements se comportent comme tout vecteurs, $\sigma : d_i \mapsto -d_i$. Mais dans notre contexte, ils doivent être traités plutôt comme des vecteurs affines, affectés aux atomes respectives $i = 1, 2, 3$. Cela impose la composition

$$P \circ \sigma : (d_1, d_2, d_3) \mapsto (-d_3, -d_2, -d_1) \Rightarrow (q_0, q_{\pm}) \mapsto (-q_0, \pm q_{\pm}) \quad \text{et} \quad (r_1, r_2) \mapsto (r_2, r_1) \quad (6.6)$$

comme l'opération de symétrie (=isotropie) du système et justifie les dénominations «asymétrique» et «symétrique» de modes normaux (6.5b) et (6.5c). On revient à la question pourquoi les équations différentielles (6.1) se découpent en (6.3). L'explication est dans le comportement distincte¹⁰ (6.6) de coordonnées q_{\pm} . Ainsi, l'équation $\ddot{q}_{\pm} = f_{\pm}(q)$ ne peut contenir que des termes f_{\pm} de même symétrie que \ddot{q}_{\pm} . Par conséquent, dans le cas linéaire, $f_{\pm}(q) \propto q_{\pm}$. \square

Exercice 6.4. Pour le système dans l'exercice 6.2, remplacez le potentiel harmonique par le potentiel de Morse $V_M(r)$ dans l'éq. (5.3) et trouvez le terme de couplage principal (cubique) entre q_+ et q_- . (NB : utiliser développement limité.)

Exercice 6.5. Considérez deux pendules $i = 1, 2$ à longueur de bras égale $|O_i M_i| = \ell$ avec une masse m attachée au bout des bras. Un ressort de masse négligeable et de rigidité k couple les pendules : Les bouts du ressort sont fixés sur les bras à une distance $l \leq \ell$ de points d'attache O_i . Pour simplicité, prenez $l = \ell$, c'est à dire, le ressort jointe les masses M_i .

Solution de l'exercice 6.5. Dans la limite des petits angles θ_i , les déplacements de M_i selon axe x (horizontal) sont données par $\approx \ell \theta_i$ et la force exercée par le ressort reste perpendiculaire au bras. En premier temps, cette approximation suffit. Pour simplicité, on assume également qu'à l'équilibre $\theta_1 = \theta_2 = 0$. A partir de lagrangien (cf ex. 2.4)

$$L = H_{\text{cin}} - H_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m \ell^2 \dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m g \ell \theta_i^2 - \frac{1}{2} k l^2 (\theta_1 - \theta_2)^2,$$

on obtient les deux équations linéaires lagrangiennes¹¹ de mouvement (voir page 3) pour θ_i

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = m \ell^2 \ddot{\theta}_i + m g \ell \theta_i + k l^2 (\theta_1 - \theta_2) c_i = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \quad c_1 = +1, \quad \text{et} \quad c_2 = -1,$$

⁹Dans l'espace des phases, $\sigma : (x, p_x) \mapsto (-x, -p_x)$ est une rotation symplectique par π , elle ne modifie pas les équations hamiltoniennes (6.1).

¹⁰Du point de vue de la théorie des groupes, q_+ et q_- se transforment selon les représentations symétrique et asymétrique du groupe $Z_2 = \{1, \sigma\}$.

¹¹Autrement, on obtient le même système de deux équations dans le formalisme hamiltonien avec $H = H_{\text{cin}} + H_{\text{pot}}$ et $p_{\theta} = m \ell^2 \dot{\theta}$.

couplées par le dernier terme. En divisant tout par $m \ell^2$ (le moment d'inertie des pendules), on obtient

$$\ddot{\theta}_i + \omega_0^2 \theta_i + \omega_r^2 (\theta_1 - \theta_2) c_i = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{g/\ell} \quad \text{et} \quad \omega_r = \frac{l}{\ell} \sqrt{k/m},$$

où on distingue la fréquence propre des pendules libres ω_0 et celle des masses attachées par un ressort ω_r . Ces équations se séparent en coordonnées (modes normaux, cf ex. 6.3) $q_1 = \theta_1 - \theta_2$ (symétrique) et $q_2 = \theta_1 + \theta_2$ (asymétrique). On passe¹² à $\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2$ et $\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$, respectivement, et trouve leurs fréquences $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_r^2}$ et $\omega_2 = \omega_0$. \square

Exercice 6.6. Considérez la chaîne dans la fig. 7 de n points matériels de masses $m_i \equiv m, i = 1, \dots, n$, couplées par des ressorts de rigidités $k_j \equiv k, j = 1, \dots, n + 1$. Donnez les équations de mouvement et proposez leur solution.

Solution de l'exercice 6.6. Soit q_1, q_2, \dots, q_n les déplacements des masses $i = 1, \dots, n$ par rapport à leur positions d'équilibre x_1, x_2, \dots, x_n , voir la fig. 7. Les «déplacements» des murs étant q_0 et q_{n+1} , les *conditions aux limites* à imposer éventuellement seront $q_0(t) = q_{n+1}(t) \equiv 0$. Par la 3me loi de Newton et la loi de Hooke, la force agissant sur la masse i est

$$F_i = -k(q_i - q_{i-1}) - k(q_i - q_{i+1}) = k q_{i-1} - 2k q_i + k q_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.7a)$$

En appliquant la 2me loi, nous arrivons aux équations différentielles d'ordre 2

$$m \ddot{q}_i = k q_{i-1} - 2k q_i + k q_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.7b)$$

Le système des équations constitué par (6.7b) possède une représentation matricielle suivant

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \ddot{\vec{x}} = k A \vec{x} \quad \text{avec} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ q_{i-1} \\ q_i \\ q_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \quad (6.7c)$$

une matrice $n \times n$ tridiagonale symétrique et constante réelle. Il suffit de diagonaliser cette matrice ... \square

6.1 Résonances et le rôle de termes non-linéaires

Exercices 6.4 et 6.5 nous offrent une possibilité d'étudier les *résonances* dans les systèmes oscillatoires à plusieurs degrés de liberté. Ainsi, alors que le rapport de $\omega_- : \omega_+$ dans la molécule CO_2 est une constante, on peut obtenir les deux modes normaux des pendules couplés dans l'ex. 6.5 en résonance exacte $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$ en ajustant, par exemple, l pour satisfaire

$$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{l}{\ell} \sqrt{\frac{k \ell}{m g}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{\ell} = \sqrt{\frac{3 m g}{2 k \ell}}.$$

Dans la limite de petites angles θ , où les équations de mouvement restent linéaires (voir la solution de l'ex. 6.5), la présence de la résonance se manifeste assez spectaculairement dans (la projection de) la *trajectoire* du système $(\theta_1(t), \theta_2(t))$: Au lieu de voir cette trajectoire remplir progressivement un rectangle dans le plan (θ_1, θ_2) , on observe une «huit», un cas particulier de la figure de Lissajous. La situation devient plus complexe en présence de termes non linéaires. Dans ce cas, pour θ assez grandes, la trajectoire devient irrégulière et la *chaos dynamique* s'installe. On enregistre (ou calcule numériquement) l'évolution des angles $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ et des impulsions $m \ell^2 (\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t))$ pour tracer la *section de Poincaré* dans le plan $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$, où on marque un point chaque fois que la trajectoire traverse ce plan avec $\theta_2 = 0$ et $\dot{\theta}_2 > 0$.

Exercice 6.7. Trouvez une solution numérique pour le système non linéaire dans l'ex. 6.5 et obtenez sa section de Poincaré.

Consignes pour l'exercice 6.7 Prenez les valeurs numériques de k, ℓ , et m (voir TP). En premier temps, gardez la force de rappel linéaire (loi de Hooke) avec une seule constante k mais relâchez la condition $\theta \approx 0$. L'hamiltonien s'écrit

$$H = H_{\text{cin}} + H_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m \ell^2 \dot{\theta}_i^2 + \sum_{i=1,2} m g \ell (1 - \cos \theta_i) + \frac{1}{2} k \ell^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2.$$

Utilisez le logiciel de calcul formel, tel que **MAXIMA**, pour obtenir les équations de mouvement sous forme hamiltonienne (dans le cas de résonance), et un intégrateur numérique (méthode Runge-Kutta) typiquement accessible depuis ce logiciel.

¹²Alternativement, en préparation à l'ex. 6.6, réécrivez ces équations sous forme matricielle $\ddot{\theta} = A \theta$ et cherchez les valeurs propres de A .

6.2 La limite $n \rightarrow \infty$

Utilisons la notation suivant pour le déplacement q_i de la masse i

$$q_i = \xi(x_i) \rightarrow \xi(x) \quad \text{le déplacement au point } x = x_i \text{ dans la limite } n \rightarrow \infty.$$

Pour les positions d'équilibre équidistantes, avec $\Delta := x_{i+1} - x_i$, on transforme l'éq. (6.7b) en

$$\begin{aligned} m \ddot{\xi}(x_i) &= m \ddot{\xi}(x) = k \xi(x_{i-1}) - 2k \xi(x_i) + k \xi(x_{i+1}) \\ &= k \xi(x_i - \Delta) - 2k \xi(x_i) + k \xi(x_i + \Delta) \\ &= k \xi(x - \Delta) - 2k \xi(x) + k \xi(x + \Delta), \end{aligned}$$

où nous reconnaissons la structure de la formule de *Leibniz*¹³ en réécrivent

$$m \ddot{\xi}(x) = k \Delta \left(\frac{\xi(x + \Delta) - \xi(x)}{\Delta} - \frac{\xi(x) - \xi(x - \Delta)}{\Delta} \right) = k \Delta (\xi'(x) - \xi'(x - \Delta)),$$

et en appliquant la même méthode, on arrive à la définition pour la deuxième dérivée de ξ au point $x - \Delta \approx x$

$$m \ddot{\xi}(x) = k \Delta^2 \frac{\xi'(x) - \xi'(x - \Delta)}{\Delta} = k \Delta^2 \xi''(x - \Delta).$$

En introduisant¹⁴ la masse linéique $\mu = m/\Delta$ et le module de *Young*¹⁵ (module d'élasticité) longitudinale $E = k\Delta$

$$\mu \ddot{\xi}(x) = E \xi''(x - \Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} E \xi''(x).$$

On remarque que la limite $\Delta \rightarrow 0$ nécessaire pour les dérivées ξ' et ξ'' implique que ξ devient à la fois une fonction (lisse au moins C^2) du temps t et de la coordonnée x . Par conséquent, dans cette limite continue, toutes dérivées apparaissant dans nos équations sont les dérivées partielles, et nous devons réécrire le résultat

$$\mu \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec } v^2 = \frac{E}{\mu}, \quad (6.8)$$

qui nous ramène directement dans la section 7.1, où (6.8) sera appelée l'équation d'onde élastique longitudinale.

¹³ La définition classique de la dérivée de $\xi(x)$ donnée par *Leibniz* (1675)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(x + \Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} = \frac{d\xi}{dx} = \xi'(x)$$

ici nous réservons la notation de *Newton* $\dot{\xi}$ et de *Lagrange* ξ' pour les dérivées (partielles) temporelles et spatiales respectivement.

¹⁴ Plus rigoureusement, comme dans le cas de la dérivée ξ' , on engage la limite $\Delta \rightarrow 0$, dans laquelle $m\Delta^{-1} \rightarrow \mu$ et $k\Delta \rightarrow E$ deviennent des constantes caractérisant le milieu (tel qu'une tige solide).

¹⁵ Le module de *Young* (ou module d'élasticité longitudinale, ou module de traction) est une constante qui relie la *contrainte* de traction/compression («stress») σ en unités de pression au petit allongement relatif, ou la *déformation adimensionnel* («strain») ϵ ,

$$\frac{F}{A} = \sigma = E \epsilon = E \frac{\Delta}{l_0} \Rightarrow F = \frac{EA}{l_0} \Delta = k \Delta \quad \text{avec, dans notre cas, } l_0 = \Delta \text{ et } A = \Delta^2.$$

7 Ondes nondispersives (séance 1)

Exemples La corde. Les vagues ...

Ondes scalaires

1. Onde plane et non-déformable. *Fonction d'onde* $f(at \mp bx)$.
2. Cas particulier important : onde sinusoïdale.
3. Types géométriques : plane, circulaire, cylindrique, sphérique
4. Ondes transversales et longitudinales.

Caractéristiques & paramètres (résumé) :

1. Période T , fréquence ν , et longueur d'onde λ .
2. Vitesse de propagation (vitesse de phase) v , nombre d'onde k ou vecteur d'onde \vec{k} .

Equation d'onde (équation d'Alembert)

7.1 Cours

Procès ondulatoire dans \mathbb{R} : Soit s une caractéristique physique (dépression, déplacement, distortion, etc), t temps, x coordonnée le long l'axe x . Considérez la fonction

$$s = f(\phi) = f(t - x/v) = f(t - k_x x) \text{ avec } v > 0 \quad (7.1a)$$

Une telle fonction décrit un procès ondulatoire. Elle est appelée ainsi la *fonction d'onde*. Son argument $\phi = t - x/v$ est appelé *phase*. Au présent, considérez un observateur qui se déplace avec une vitesse v , donc sa coordonnée est $x(t) = x_0 + vt$. Pour un tel observateur la phase restera constante :

$$\tilde{s} = f(t - x(t)/v) = f(-x_0/v) = \text{const.}$$

Alors la fonction d'onde (7.1a) décrit une *propagation en direction positive*. De façon similaire on obtient que

$$s = f(t + x/v) \text{ avec } v > 0 \quad (7.1b)$$

correspond à une *propagation en direction négative*. La constante $v > 0$ donne la *vitesse de propagation*. On peut ainsi introduire la forme plus générale d'une fonction d'onde

$$s = f(\omega t - k_x x) = f(\omega(t \mp x/v)) \text{ avec } v > 0 \text{ et } k_x = \pm\omega/v, \quad (7.1c)$$

où $k_x \neq 0$ dit *nombre d'onde* est un nombre positif ou négatif selon la direction de propagation du procès, tandis que ω donne l'échelle du temps.

Exercice 7.1. Considérez le procès décrit par la fonction d'onde $f(\omega(t \mp x/v))$ où

$$f(\phi) = \exp(-\phi^2/2) \quad (\text{la «cloche» Gaussienne}).$$

Faites le graphes pour différentes valeurs de t . Que pouvez vous dire sur la direction de propagation ?

Procès ondulatoire dans \mathbb{R}^3 : Les positions en espace euclidienne physique à trois dimensions sont données par le vecteur \vec{r} ; en coordonnées cartésiennes $\vec{r} = (x, y, z)^T$. On obtient

$$s = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \text{ avec } k = \|\vec{k}\| > 0 \text{ et } v = \omega/k \quad (7.2)$$

où le *vecteur d'onde* \vec{k} pointe la direction de propagation.

Equation d'onde (Euler 1748, d'Alembert 1747, connue comme équation de d'Alembert)

Pour la dérivée complète de f on utilisera la notation suivante : $f'(\phi) = \frac{df}{d\phi} = \frac{df}{d(t \mp x/v)}$



Christiaan Huygens

Dérivons $s = f(t \mp x/v)$ dans (7.1) deux fois sur x et sur t . Cela donne, respectivement,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f'' \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f''$$

(Notez que la double dérivation nous débarrasse du signe \mp devant x/v .) Par conséquent

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

De façon similaire on obtient pour les ondes en espace physique \mathbb{R}^3 avec coordonnées (x, y, z)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) = v^2 \Delta s. \quad (7.4)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace ou *Laplacien*.

Exercice 7.2. Faites en détailles le calcul pour obtenir (7.4) à partir de (7.2).

Ondes sinusoïdales dans \mathbb{R} Dans ce cas très important, la fonction $f(\phi(t, x))$ dans (7.1c) est une harmonique

$$s = A \cos(\omega t - k_x x + \phi_0), \quad (7.5)$$

avec *amplitude* $A > 0$ (constante réelle positive), *pulsation* ω , nombre d'onde k_x , et—s'il le faut—la phase «initiale» ϕ_0 dans le point $x = 0$ au moment $t = 0$. On utilise également la représentation complexe de (7.5) basée sur $\exp(\omega t - k_x x)$.

Exercice 7.3. Vérifiez que la fonction d'onde (7.5) satisfait l'équation de d'Alembert (7.3).

A chaque moment du temps, l'onde se présente dans l'espace \mathbb{R} comme une fonction harmonique $A \cos(k_x x)$ sans fins de période spatiale

$$\lambda = 2\pi/k_x \quad (7.6)$$

dit *longueur d'onde*. On voit que la vitesse de propagation (ou la *vitesse de phase*) est

$$v = \omega/k_x = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu, \quad (7.7)$$

où $T = 2\pi/\omega$ [sec] est la *période* temporelle des oscillations, et $\nu = \omega/(2\pi)$ [Hz] est leur *fréquence*.

Ondes sinusoïdales dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 On denote les coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques, respectivement, (x, y, z) , (φ, ρ, z) , et (φ, θ, r) . Pour différents *symétries* agissant dans l'espace on obtient :

Ondes planes

$$s = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0), \quad (7.8a)$$

Ondes circulaires et cylindriques

$$s = \frac{A}{\sqrt{\rho}} \cos(\omega t - k_\rho \rho + \phi_0), \quad (7.8b)$$

Ondes sphériques

$$s = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k_r r + \phi_0), \quad (7.8c)$$

Exercice 7.4. Pour chaque fonction d'onde (7.8) et pour un moment fixe du temps, prenez un point dans l'espace et dessinez l'ensemble de tout points dans l'espace dans lesquels la phase est de même valeur. Cet ensemble est appelé *le front de l'onde*. Dans chaque cas, quelle est sa symétrie ?

Exercice 7.5. Pour chaque fonction d'onde (7.8), vérifiez que l'équation de d'Alembert (7.3) est satisfait. Notez que en coordonnées cylindriques et sphériques le Laplacien s'exprime, respectivement,

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (7.9a)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (7.9b)$$

Solution : Pour le cas d'onde sphérique, f ne depend que de r . Par conséquent, nous avons à vérifier que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \Delta s \Rightarrow -\omega^2 s = \frac{v^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{v^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-\cos \xi + kr \sin \xi) = -v^2 k^2$$

où $\xi(t, r) := (\omega t - kr + \phi_0)$.

7.2 Ondes électromagnétiques

Exercice 7.6. Rappel sur l'équation d'onde (sec. 7.1). Montrez que tout un processus de propagation ondulatoire d'une grandeur s le long de l'axe x est décrit par une fonction du type $s = s(t \mp x/v)$. Ainsi donnez la définition de la *phase*, de la *vitesse de phase*, et du *front*, et précisez la direction de propagation. En comparant les deuxièmes dérivées spatiale et temporelle de s , obtenez l'équation d'onde dans une dimension et la généralisez en 3D.

7.2.1 Rappel sur la théorie de Maxwell

Coulomb 1785, Oersted 1820, Faraday 1831, Maxwell 1861–1864 ...

Equations de Gauss (avec $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la densité de charge) :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{où} \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (7.10a)$$

Equations de l'induction (avec $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la densité du courant de conductivité) :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.10b)$$

Exercice 7.7. Énoncez les équations de Maxwell en forme locale (7.10) dans le vide (donc en absence des courants et des charges électriques). Appliquez l'identité du calcul vectoriel

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad \text{avec} \quad \operatorname{div} \mathbf{A} := \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} := \nabla \times \mathbf{A}$$

pour en déduire que la vitesse de la lumière (dans le vide) est $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/sec, avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, et $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ F/m.

This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reasons to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiations if any) is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws. J. C. Maxwell, 1865



James Clerk Maxwell

7.2.2 Equation d'onde électromagnétique plane

Exercice 7.8. Considérez les champs $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 \cos(\omega t + kz) \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\omega t + kz) \mathbf{e}_y$. Conforment ils aux équations de Maxwell (7.10) ? Sous quelles conditions ? Appliquez (7.10) et précisez la relation entre B_0 et E_0 , ω et k .

Exercice 7.9. Considérez une onde plane dont le front est parallèle au plan $\{z = 0\}$ (plan xOy).

- i. Quelles conditions sur les dérivées spatiales doit-on imposer dans ce cas ?
- ii. Simplifiez les équations du groupe induction (7.10b) et montrez que B_z et E_z sont constants (statiques). En appliquant les équations du groupe Gauss (7.10a) montrez que B_z et E_z ne dépendent de z . Pour la suite mettez $B_z = E_z = 0$.
- iii. Parmi les équations restantes du groupe induction (7.10b), choisissez une paire décrivant une onde plane polarisée rectilignement selon l'axe x . Que impose cela sur les composantes de \mathbf{E} ? Quelles composantes sont présentes dans cette paire des équations ? Que pouvez-vous conclure sur l'orientation des champs électriques et magnétiques dans cet onde ?
- iv. Dérivez ces équations soit par rapport au temps soit par rapport à la variable spatiale restante (laquelle ?) et obtenez ainsi les équations d'onde pour la composante $E_x(z, t)$.
- v. Quelle est la vitesse de propagation ? Quelle est la forme générale de la fonction $E_x(z, t)$?
- vi. Obtenez aussi l'équation d'onde pour la composante du champ magnétique $H(z, t)$ (laquelle ?) induite par la variation de $E(z, t)$. Obtenez la relation entre $E(z, t)$ et $H(z, t)$. Ces deux champs, sont-ils en phase ?
- vii. Exprimez $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ pour une onde plane, harmonique, polarisée rectilignement, dont la direction de propagation est donnée par le vecteur d'onde \mathbf{k} . Dessinez le trièdre direct $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$, déduisez la relation entre $\mathbf{E}(z, t)$ et $\mathbf{H}(z, t)$.

7.2.3 Énergie des ondes électromagnétiques. Intensité

Exercice 7.10. En sachant que l'énergie par unité du volume $dW/d\tau$ des champs électrique et magnétique est respectivement $\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}^2$ et $\frac{1}{2}\mu\mu_0 \mathbf{H}^2$ trouvez l'énergie dans un volume parcouru par l'onde pendant le temps dt . Ainsi trouvez le flux d'énergie et donnez l'expression du vecteur de Poynting \mathbf{P} . Expliquez sa relation avec l'énergie du champ électromagnétique (dans le vide) et sa signification physique (comme vecteur).

Exercice 7.11. Soit $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, où $E_x = E_0 \sin(\omega t - kx)$ et $k = 2\pi/\lambda$, se propage dans le vide. Trouvez la grandeur instantanée $P(x, t)$ et l'orientation du vecteur de Poynting \mathbf{P} . Trouvez la valeur moyenne \bar{P} appelée *intensité*.

Exercice 7.12. Onde stationnaire. Considérez deux ondes \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 de mêmes pulsation ω , norme $\|\mathbf{k}\|$ du vecteur d'onde et amplitude E_0 qui se propagent dans les directions opposées selon l'axe x (\mathbf{e}_x et $-\mathbf{e}_x$). Trouvez le champ résultant \mathbf{E} . Représentez graphiquement $\mathbf{E}(x, t)$ pour $t = 0, T/4, T/2, \dots$ (où T est la période). Utilisez une des équations de Maxwell pour retrouver $\mathbf{B}(x, t)$. Enfin trouvez $P(x, t)$ et \bar{P} .

7.3 L'équation de Schrödinger, les ondes de de Broglie, et l'atome d'hydrogène

L'équation de Schrödinger¹⁶, connue aussi sous le nom de *l'équation ondulatoire* (wave equation, Wellengleichung),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = \hat{H} \psi(t, x), \quad (7.11)$$

où l'opérateur différentiel \hat{H} représente l'hamiltonien (l'énergie) du système, est l'équation fondamentale de la *mécanique quantique* ressemblant à (7.3).

Exercice 7.13. Généralement, une équation d'onde est tout équation différentielle admettant les solutions de forme $\psi(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})$. Vérifiez que c'est aussi le cas de l'équation (7.11).

Sa solution $\psi(t, x)$ (ici en version spatiale) décrit la probabilité de trouver la particule dans le point x au temps t . Remarquablement, $\psi(t, x)$ est couramment nommée *fonction ondulatoire* (wavefunction, Wellenfunktion) ou *fonction d'onde*. Pour une particule libre de masse m , l'hamiltonien est égal à l'énergie cinétique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\hbar^2 \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

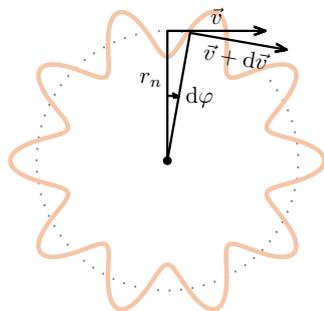
et les solutions de l'équation ondulatoire (7.11)

$$\psi(t, x) = A \exp(i\omega t - ikx) \quad (7.12)$$

ont la forme d'une onde plane complexe progressive dont l'amplitude A est déterminée par la normalisation de la distribution de probabilité¹⁷. Les constantes d'intégration $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $k \in \mathbb{R}$ correspondent à l'énergie et à la quantité de mouvement classiques, respectivement

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{et} \quad p = \hbar k,$$

mais la célérité ω/k de (7.12) ne donne que la moitié $v/2$ de la vitesse classique v . Ceci est dû au fait que (7.12) est delocalisée sur tout \mathbb{R} et ne correspond pas directement à une particule classique.



Considérons le système de deux corps, le proton et l'électron, constituant l'atome d'hydrogène. La masse du proton de $1836m_e$ est assez grande pour assumer que le proton reste immobile dans $0 \in \mathbb{R}^3$. Dans le champ central Coulombien du proton, l'électron classique reste sur des orbites circulaires (ou, plus généralement, elliptiques) de rayon r . Si, comme suggéré par de Broglie¹⁸, on représente l'électron par l'onde (7.12) de longueur $\lambda = 2\pi/k$, il est impératif (voir la figure ci à gauche) de satisfaire la condition

$$2\pi r_n = n\lambda = n\hbar \frac{2\pi}{mv} \quad \text{où } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.13)$$

pour une onde stationnaire le long d'un cercle de rayon $r = r_n$, car toute autre onde se auto-détruit (c'est à dire par l'interférence avec elle-même¹⁹). D'autre part, un mouvement classique à vitesse de valeur absolue constante v le long de ce cercle subit une accélération radiale

$$a_r = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v d\varphi}{dt} = \frac{v^2}{r_n}$$

due à la force coulombienne de l'attraction entre l'électron et le proton. Par conséquent, selon la 2^{me} loi de Newton,

$$m_e a_r = \frac{v^2}{r_n} = 4\pi\epsilon_0 \frac{e^2}{r_n^2} \quad (7.14)$$

où m_e et e sont, respectivement, la masse et la charge de l'électron. On résout (7.13) et (7.14) pour arriver à

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{m_e^2 e^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_e e^2}{\hbar n}.$$

En particulier, $r_1 = 0.529\text{\AA} = 5.29\text{m}^{-11}$, nommé *rayon de Bohr* a_0 , est le rayon de la première orbite (état atomique 1s).

¹⁶Erwin Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Annalen der Physik **79** p.361 et 489 ; **80**, p.437 ; **81**, p.109 (1926).

¹⁷L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Mécanique quantique, théorie non-relativiste*, 3^{me} édition, Nauka, Moscou, 1974 ; voir la fin de la chap. III§21.

¹⁸Louis de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta* (thèse de physique), Paris, 1924.

¹⁹Comparer au TP «Vitesse du son» de L2 où le son est propagé dans un trombone à circonférence variable ; voir la sec. 8.1.4 et 8.1.5.



Erwin Schrödinger

8 Ondes nondispersives (séance 2)

8.1 Cours

On continue de couvrir des différents aspects des ondes non-dispersives. On donne surtout des exemples physiques, notamment la corde (un prototype pour un nombre de systèmes importants) et l'acoustique.

Exemple Obtenir l'équation d'onde pour la corde.

Ondes scalaires Rappel sur ondes transversales et longitudinales.

Ondes acoustiques discussion préliminaire, TD expérimental.

Ondes vectorielles Exemple : ondes électromagnétiques. Rappels. Polarisation.

Propagation Onde progressive et stationnaire. Nœuds, conditions limite.

Superposition des ondes. Phénomène d'interférence. Exemple : deux sources.

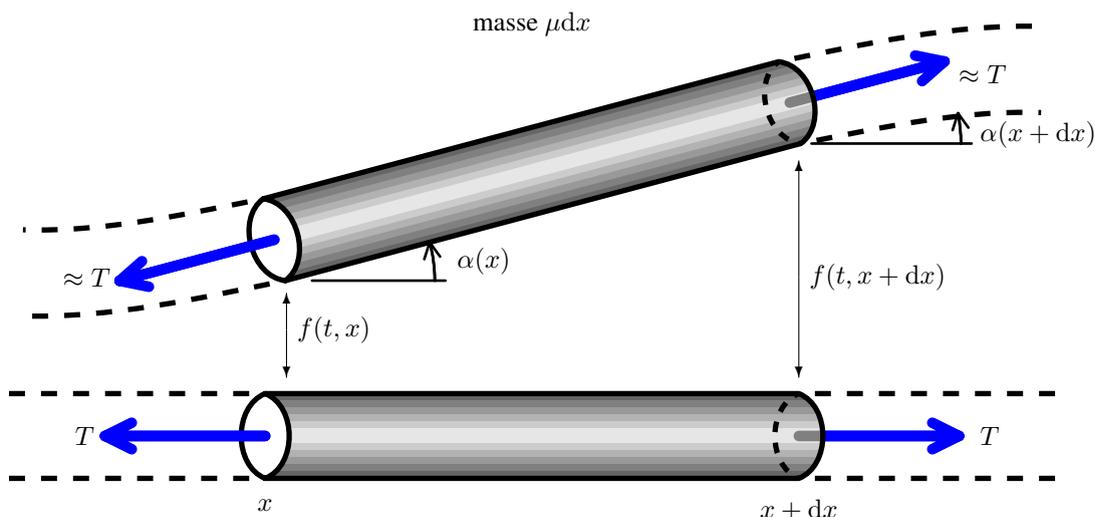
Principe de Huygens Phénomène de diffraction.

Atténuation Terme additionnel dans l'équation d'onde, solution dans le cas sinusoïdal.

Dispersion Définition, terme additionnel dans l'équation d'onde.

8.1.1 Exemple physique : équation d'onde pour une corde

Prenez une corde, élastique et flexible, tendue initialement, en position de l'équilibre, le long de l'axe x (horizontal). La tension $T > 0$ et uniforme. (Notez que ici T donne la valeur absolue des forces de tension.) La masse linéique de la corde $\mu > 0$ [kg/m] est constante elle aussi. On considère le mouvement *strictement transversal* dans tout points de la corde, voir la figure ci-dessous, où ce mouvement est vertical.



Le déplacement de chaque point x de la corde à chaque instant du temps t est donné par la fonction $f(t, x)$. Considérez un petit segment de la corde de longueur dx situé au point x . Déplacé de son équilibre, ce segment peut être étiré faiblement (car la corde est supposée élastique), mais sa masse restera la même, $dm = \mu dx$. En plus, si les déplacements sont petits, ces étirements sont négligeables et la force de tension restera inchangée $\approx T$. La valeur absolue de cette force projetée sur l'axe vertical sera $T|\sin \alpha(t, x)|$ où $\alpha(t, x)$ est l'angle que fait la corde avec l'axe horizontal au point x au moment t . Par définition de $f(t, x)$ nous avons

$$\alpha(t, x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t,x}.$$

En plus, parce que tout est petit, cet angle est lui aussi petit et

$$\sin \alpha(t, x) \approx \alpha(t, x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t,x}.$$

Notons aussi que le mouvement de chaque point est accéléré et l'accélération

$$a = a(t, x) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{t,x}.$$

varie avec position sur la corde x et temps t . Alors, on a enfin tout pour appliquer la deuxième loi de Newton

$$(dm)a = \mu dx \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{t,x} \approx -T \sin \alpha(t, x) + T \sin \alpha(t, x + dx) \approx -T \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t,x} + T \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t,x+dx}$$

On constate que la somme des forces sera nulle pas justement si le déplacement vertical $f(t, x)$ ne varie avec x , mais aussi si sa dérivée $\partial f/\partial x$ est constante ! En d'autres mots, la corde doit être courbée (légèrement !). La courbure est naturellement donnée par la deuxième dérivée

$$\frac{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t,x+dx} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t,x}}{(x + dx) - x} := \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{t,x}.$$

Alors nous obtenons l'équation d'Alembert pour la corde

$$\mu dx \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{t,x} = T \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{t,x} dx \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{t,x} = v^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{t,x}, \quad \text{avec } v = \sqrt{T/\mu}. \quad (8.1)$$

où v est la vitesse de propagation de phase des ondes transversales dans la corde tendue, voir (7.3).

8.1.2 Ondes acoustiques, notions préliminaires, surpression

Il s'agit d'ondes mécaniques, comme dans le chapitre précédent, mais le mouvement de vibration est longitudinal, parallèle à la direction de propagation. Dans un gaz, la pression est souvent assez élevée, de l'ordre de la pression atmosphérique, $P \approx 10^5 \text{ Pa}$. Quand une vibration est produite et se propage, elle est véhiculée par une surpression locale et dépendant du temps $p(x, t)$, avec $|p| \ll P$. Comme les phénomènes acoustiques sont très rapides, l'équilibre des températures n'est pas atteint. L'évolution d'un volume V est reliée à celle de la pression par la loi adiabatique (cf exercice 2.9)



Orgue

$$PV^\kappa = \text{cte} \Rightarrow dP/P + \kappa dV/V = 0, \quad \text{avec } \kappa = C_p/C_v > 1, \quad (8.2a)$$

où C_p et C_v sont des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. La forme différentielle (8.2a) au point de fonctionnement suffit, avec la valeur de κ en ce point ; la forme intégrale impliquant que κ reste constant sur une grande plage n'est pas nécessaire.

La constante (le coefficient) adiabatique κ dans l'équation (8.2) est connue autrement comme le coefficient de Laplace et est dénotée couramment γ . On la prédit en théorie cinétique des gazes, pour tout gaz, seulement comme fonction du nombre de degrés de liberté d des molécules/atomes constituant le gaz, en considérant ces molécules comme rigides, i.e., sans vibrations internes.

| atomes | géométrie | translations | rotations | d | κ | où $\kappa = \frac{d+2}{d}$ (8.2b) |
|----------|-------------|--------------|-----------|-----|----------|------------------------------------|
| 1 | | 3 | 0 | 3 | 1.66 | |
| 2 | | 3 | 2 | 5 | 1.4 | |
| ≥ 3 | linéaire | 3 | 2 | 5 | 1.4 | |
| ≥ 3 | nonlinéaire | 3 | 3 | 6 | 1.33 | |

Évidemment, dans un procès adiabatique réversible, la température T doit aussi varier. À partir de l'équation d'état,

$$P = nRTV^{-1} \Rightarrow TV^{\kappa-1} = \text{cte} \Rightarrow dT/T + (\kappa - 1) dV/V = 0. \quad (8.2c)$$

Exercice 8.1. Proposez une expérience permettant de mesurer la vitesse du son. Duquel matériel aurez vous besoin ? Expliquez le principe des mesures.

Exercice 8.2. Réalisez cette expérience avec le matériel de démonstration : haut parleur (HP) d'impédance 8 ou 4 Ω , générateur basses fréquences (GBF) avec sortie HP pré-amplifiée, oscilloscope à deux canaux, microphone avec un préampli et, possiblement, un filtre passe bande.

8.1.3 Équation d'ondes acoustiques

Considérons un cylindre de section constante S le long de l'axe d'abscisse x contenant un gaz de pression P , température T et masse volumique μ . Considérons un petit volume $V = S dx$ de masse $m = \mu S dx$ se trouvant *aurepos* dans x . Imaginons une déformation (longitudinale !) de l'état d'équilibre telle que le point x se déplace vers $x + u(x, t)$. Par conséquent, le volume V se déforme et devient

$$S [x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t)] = S dx + S \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x,t} dx = V + dV.$$

On obtient la variation relative $dV/V = \partial u/\partial x$ et utilise (8.2) pour trouver la surpression

$$p = dP = -\kappa P \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x,t}. \quad (8.3)$$

La somme des forces agissant sur V de gauche $S [P + p(x, t)]$ et de droite $-S [P + p(x + dx, t)]$ est

$$F = S [P + p(x, t)] - S [P + p(x + dx, t)] = -S \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x,t} dx = -V \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x,t} = \kappa PV \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x,t},$$

où on applique (8.3). Par conséquent, la 2me loi de Newton pour V s'écrit

$$m \ddot{x} = m \ddot{u} = \mu V \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x,t} = F = \kappa PV \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_{x,t},$$

d'où on obtient l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \text{avec } v^2 = \frac{\kappa P}{\mu} = \kappa \frac{RT}{M}. \quad (8.4)$$

Ici on suppose l'équation d'état de gaz parfait qui pour une mole prend la forme $PV = P(M/\mu) = RT$, avec la masse molaire M et la température absolue T .

En prenant $M = 29$ g (moyenne entre l'oxygène et l'azote selon leurs proportions respectives), $T = 300$ K, et $\kappa = 1.4$ pour un gaz diatomique, on calcule la vitesse du son $v = 347$ m/s. Notez que v est largement inférieure à la vitesse c de la lumière. Cela explique le décalage entre la perception de la lumière et celle du son d'un éclair.

Remarque La relation (8.3) rappelle la formulation $F = kdx$ de la loi de *Hooke* (loi des ressorts) ou encore $f = E \partial l/l$ avec le module d'Young E . On peut montrer (voir sec. 6.2) que la vitesse du son dans les solides est

$$v^2 = \frac{E}{\mu} \quad \text{avec la masse linéique } \mu.$$

8.1.4 Ondes stationnaires. Noeuds, conditions limite

La flûte, l'orgue, etc

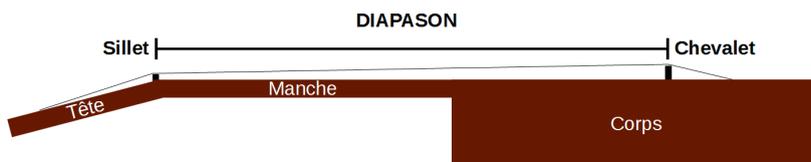
$$A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx) = 2A \sin(\omega t + \pi/2) \cos(-kx - \pi/2)$$

Les notes La fréquence ν_n de la note située n demi-tons au-dessus de la note de départ ν_0 est donnée par la formule

$$\nu_n = \nu_0 \times a^n \quad \text{avec } a = 2^{1/12}$$

On s'aperçoit que la fréquence croit de manière géométrique par rapport à la note.

Exercice 8.3. On joue de la guitare. La corde pour la note *La* de la 3^{ème} octave donne la fréquence $\nu = 440$ Hz (fréquence de référence). Le diapason de la guitare²⁰ est de longueur $L = 0.61$ m, la masse linéique de la corde est $\mu = 7$ g/m.



1. Caractérissez le type des ondes (transversal, longitudinal, sinusoïdal, progressif, stationnaire etc).

²⁰Sur une guitare acoustique, le diapason (c'est à dire, la partie pertinente de la manche+corps, voir la figure) varie entre 61 et 66 cm.

2. Quelle est la longueur d'onde ? Quelle est sa forme ? Pourquoi ?
3. Proposez la fonction d'onde $f(t, x)$ correspondante.
4. Quelle est (approximativement) la vitesse de propagation ?
5. Quelle est (approximativement) la tension de corde nécessaire pour jouer cette note ? Quelle masse m aurait on besoin de suspendre pour produire une telle force ?
6. A présent, on fait vibrer la corde et on entend d'autres notes en plus de la note La désirée de la 3^{ème} octave. Pourquoi ? Quelles sont les fréquences ν et longueurs d'onde λ de ces notes ? Pourquoi ?

Commentaire : Assumez les ondes non-dispersives et négligez atténuation.

Exercice 8.4. Quel est la longueur du pipe de l'orgue donnant la note Re de la 2^{ème} octave, fréquence 147 Hz ? Comment varie la longueur pour les notes de la même octave ?

8.1.5 Interférence

Expérience de Young Considérez deux sources ponctuelles (ou deux fentes parallèles à l'axe z) situées dans les points A et B , avec $|AB| = \ell$ et $AB \parallel Ox$, et l'écran situé dans le plan xOz parallèlement à AB à la distance $L \gg \ell$ (voir la figure). L'axe $Oy \perp AB$ intersecte AB dans le point O' au milieu entre A et B . Prenez point X dans l'écran xOz à la distance x du centre O .

Au départ de chaque source, l'onde est donnée par

$$I_0 \cos(\omega t - k \cdot r + \phi_0), \quad \text{avec } \phi_0 = 0.$$

A l'arrivée au point X situé dans le plan de l'écran, nous avons²¹

$$\begin{aligned} I(x, t) &= I_r \cos(\omega t - k|AX|) + I_r \cos(\omega t - k|BX|) \\ &= 2I_r \cos\left(\omega t - k \frac{|BX| + |AX|}{2}\right) \cos\left(k \frac{|BX| - |AX|}{2}\right), \end{aligned}$$

où dans la limite de $L \gg \ell$, en prenant²² $\varepsilon = \ell/L$ et $x \approx \ell$, on exprime

$$|AX| = \sqrt{L^2 + \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2} \approx L \left[1 + \frac{(\ell/2 - x)^2}{2L^2}\right], \quad (8.5a)$$

$$|BX| = \sqrt{L^2 + \left(\frac{\ell}{2} + x\right)^2} \approx L \left[1 + \frac{(\ell/2 + x)^2}{2L^2}\right], \quad (8.5b)$$

et par conséquent

$$\frac{|BX| + |AX|}{2} \approx L \left(1 + \frac{\ell^2 + x^2}{2L^2}\right) = L + O(\varepsilon^2), \quad \text{et} \quad \frac{|BX| - |AX|}{2} \approx -\frac{x\ell}{2L}.$$

Alors

$$I(x, t) = 2I_r \cos(\omega t - kL) \cos\left(-\frac{\ell k}{2L} x\right) = 2I_r \cos(\omega t - kL) \cos\left(\pi \varepsilon \frac{x}{\lambda}\right) \quad (8.6)$$

Pour concrétiser ce résultat, notez que pour les ondes cylindriques $I_r = I_0/\sqrt{r} \approx I_0/\sqrt{L} + O(\varepsilon^2)$, et qu'on enregistre typiquement la puissance moyenne, i.e., la moyenne durant une période $T = 2\pi/\omega$ de l'amplitude carrée

$$P(x) = [I(x, t)^2] = \frac{1}{T} \int_0^T I(x, t)^2 dt.$$

Exercice 8.5. Considérez deux sources ponctuelles émettant les ondes harmoniques (sinusoïdales) \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 de même pulsation ω , de même $\|\mathbf{k}\|$, de même phase initiale $\varphi_0 = 0$ et de même amplitude E_0 qui se propagent dans le vide. Les sources sont situées dans les points $(0, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Trouvez le champ $\mathbf{E}(t)$ au point $M = (l, 0, 0)$ de l'axe x . Trouvez la grandeur instantanée $P_M(t)$ du vecteur de Poynting \mathbf{P} et sa valeur moyenne \bar{P}_M . Précisez le sens physique de \bar{P} . Trouvez le (les) distance(s) $l > 0$ pour laquelle(s) \bar{P}_M est maximale.

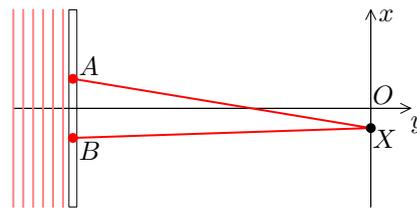
Exercice 8.6 (interféromètre). Dans le TP «ondes centimétriques» de 2me année de licence physique-chimie on utilise l'interféromètre de Michelson (IM) pour déterminer la longueur λ des ondes radio de fréquence $\nu \approx 10$ GHz émises par un klystron. Expliquez le principe de cette expérience et exprimez la puissance des ondes $\bar{P}(d)$ enregistrée par le récepteur en fonction de sa distance d du miroir séparateur de l'IM. Expliquez le principe de la mesure de l'indice de réfraction n d'une plaque de plexiglass qu'on introduit par la suite dans un de bras de l'IM.

Exercice 8.7 (bifentes de Young). Dans le TP «ondes centimétriques» ($\lambda = 3$ cm) de 2me année de licence physique-chimie (voir l'exercice 8.6) on utilise un bras de l'IM de longueur $L \approx 50$ cm comme goniomètre permettant d'observer l'interférence de deux ondes parvenus de fentes de Young de largeur $\delta = 2.4$ cm et entraxe $\ell = |AB| \approx 10$ cm en fonction de l'angle θ entre l'axe Oy et le bras de l'appareil. Exprimez l'intensité I en fonction de θ .

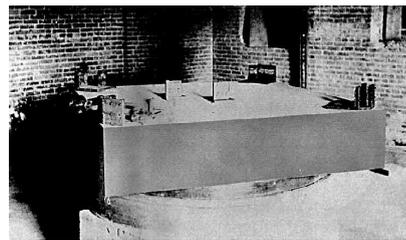
Démonstration. On modifie le calcul et la figure au début de la sec. 8.1.5. Au présent, le point X est situé à une distance fixe $L \gg \ell$ du centre O' de AB . Puisque $|AO'| = |BO'| = \ell/2 \ll L$, on exprime

$$|AX| = \sqrt{(L \cos \theta)^2 + (L \sin \theta - |AO'|)^2} \approx L \left(1 - \frac{\ell/2}{L} \sin \theta\right) \quad \text{et} \quad |BX| \approx L \left(1 + \frac{\ell/2}{L} \sin \theta\right),$$

et par conséquent, on a le facteur de $\cos\left(\frac{k\ell}{2} \sin \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \sin \theta\right)$ modulant l'intensité en fonction de θ . □



Expérience de Young



Michelson & Morley, 1887

²¹ rappelez que $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
²² utilisez le développement limité pour $\sqrt{1 + \varepsilon^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$

8.1.6 Diffraction

Le principe de Huygens : tout point du front d'onde agit comme une source secondaire.

Expérience de *Fraunhofer* pour une seule fente d'une petite largeur : Au présent, considérez la fente AB (coupée dans l'écran parallèlement à l'axe z). Selon le principe de *Huygens*, tout point de AB représente une source ponctuelle secondaire (des ondes cylindriques). En prenant à chaque fois deux points A' et B' de AB symétriquement par rapport au centre O , et en utilisant le résultat (8.6), nous trouvons l'intensité au point X comme une somme

$$I(x, t) = 2I_r \cos(\omega t - kL) \int_0^\ell \cos\left(-\frac{|A'B'|k}{2L} x\right) d|A'B'| = 2I_r \cos(\omega t - kL) \frac{2L}{kx} \sin\left(\frac{\ell k}{2L} x\right).$$

Par conséquent

$$P(x, t) = P_0 \operatorname{sinc}^2(2\pi x/a) \text{ avec la période spatiale } a = \frac{2L}{\ell} \lambda = 2\ell / F,$$

où F est parfois appelé nombre de *Fresnel*. On constate, que ℓ/L doit être assez petit, ou, également, $F \ll 1$ pour voir l'alternance des intensités sur l'axe x à l'échelle plus grande que ℓ .

Exercice 8.8 (diffraction des ondes centimétriques). Dans le TP «ondes centimétriques» ($\lambda = 3$ cm) de 2^{me} année de licence physique-chimie on propose d'utiliser un bras de l'interféromètre de Michelson (voir l'exercice 8.6) de longueur $L \approx 50$ cm comme un goniomètre pour observer la diffraction par une fente de largeur $\ell = 10$ cm en fonction d'angle θ entre l'axe Oy de la fente et le bras de l'appareil. Exprimez $I(t, \theta)$ et $\bar{P}(\theta)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre le résultat de l'exercice 8.7 avec $\ell = |A'B'|$ et suivre le calcul au début de la sec. 8.1.6

$$\int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi |A'B'|}{\lambda} \sin \theta\right) d|A'B'| = \ell \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \ell}{\lambda} \sin \theta\right) \left(\frac{\pi \ell}{\lambda} \sin \theta\right)^{-1} = \ell \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \ell}{\lambda} \sin \theta\right).$$

Ainsi les maximums de $\bar{P}(\theta)$ auront lieu pour $\ell \lambda^{-1} \sin \theta = n \in \mathbb{N}_0$, et ℓ doit être assez large pour satisfaire $n \lambda / \ell < 1$. \square

8.1.7 Terminaison, impédance

Génération. Impédance Dans la sec. 8.1.1 et sa figure on implique que la corde est infinie, c'est à dire, elle va de $-\infty$ à $+\infty$ le long de l'axe x . Evidemment, cela est une idéalisation (car tout qui est bien ou mal arrive à sa fin). Au présent donc, considérons une corde qui commence à $x = 0$ et qui va vers $+\infty$. La fonction d'onde est

$$f(t - x/v) = f(\phi) \text{ avec la vitesse de phase } v = \sqrt{T/\mu}.$$

Quelle est la *force périodique* $F(t)$ nécessaire pour initier (*générer*) les ondulons transversales au point $x = 0$? Selon le bilan des forces dans la sec. 8.1.1

$$F(t) = -T \sin \alpha(t, x)|_{x=0} \approx -T \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t, x=0} = -T \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t, x=0} = \sqrt{T\mu} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t, x=0},$$

où nous avons utilisé

$$f'(\phi) = \frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Par l'analogie avec les oscillations forcées (sec. 4), on observe que $\partial f / \partial t$ est la vitesse $\dot{y}(t)$ dans $x = 0$. Le coefficient

$$Z_0 = \sqrt{T\mu}, \text{ avec } T = Z_0 v \text{ et } \mu = Z_0 / v,$$

est appelé l'*impédance caractéristique*. Elle dépend seulement de la corde et sa tension, c'est à dire, l'impédance est la propriété du système. Dans des autres systèmes nous utiliserons Z_0 et v comme leur paramètres.

Terminaison Retournons la situation précédant. Prenons une corde qui arrive de $x = -\infty$ et qui se *termine* à $x = 0$. Quelle est la force $F_{\text{term}}(t)$ nécessaire pour compenser la partie «manquant» de la corde? Par les mêmes arguments

$$F_{\text{term}}(t) = -Z_0 \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t, x=0},$$

c'est à dire, la même force $F(t)$ mais avec le signe opposé. Que se passe-t-il si cette compensation n'est pas faite?

Exercice 8.9. Proposez l'analogie électrique pour la terminaison (appelée *dumper* en anglais).

8.1.8 Réflexion et transmission

Terminaison correcte (Z_0) et incorrecte (Z_1). Solution générale comme une somme de deux ondes (voir ondes stationnaires, sec. 8.1.4), l'onde *incidente* et l'onde *réfléchie*, avec les amplitudes différentes qui se propagent en directions opposées. La fonction d'onde est

$$f(t, x) = f_i(t - x/v) + f_r(t + x/v)$$

Pour que les forces induites par $f(t, x)$ (de l'impédance Z_0) et la force de la terminaison (de l'impédance «incorrecte» $Z \neq Z_0$) ou «force de frottement» se compensent au point $x = 0$, nous devons satisfaire

$$Z_0 \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial f_r}{\partial t} \right)_{x=0} = Z \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x=0} = Z \left(\frac{df_i}{d\phi} \Big|_{x=0} + \frac{df_r}{d\phi} \Big|_{x=0} \right),$$

où les signes opposés des contributions par f_i et f_r sont dus à leurs directions de propagation opposées. On déduit

$$\frac{df_r}{d\phi_r} = \frac{\partial f_r}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_{x=0} = R \frac{df_i}{d\phi_i} \quad \text{avec } \phi_r = \phi_i + \delta \text{ et } d\phi_r = d\phi_i,$$

où R est *coefficient de réflexion*. L'égalité de dérivées $d/d\phi$ au point 0 signifie que

$$f_r(t, 0) = R f_i(t, 0)$$

Ainsi, pour $Z = \infty$ ce coefficient $R = -1$ et on obtient une onde stationnaire avec un noeud au $x = 0$. Dans l'autre limite de $Z = 0$, nous avons la réflexion totale par le point libre avec $R = 1$.

8.1.9 Atténuation

Exemples : La corde dans une liquide visqueuse. Diapason avec un résonateur. Dans chaque cas expliquez l'origine des pertes.

Exercice 8.10. Imaginez un diapason avec un résonateur «parfait» dont les parois n'absorbent pas les vibrations et ne laissent pas les ondes acoustiques sortir. On frappe le diapason. Va-t-il sonner infiniment ? Si non, quel serait l'origine des pertes ? Comment pourrait-on mettre en évidence—voir enregistrer ces pertes ?



Diapason

Retournez à l'équation de la corde (sec. 8.1.1). Soit $-\beta(\partial f/\partial t) dx$ une *force de frottement* agissant sur le segment de corde dx . On obtient donc l'équation suivante

$$\mu dx \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{t,x} = T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{t,x} dx - \beta \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t,x} dx \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{t,x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t,x} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{t,x}, \quad \text{avec } v = \sqrt{T/\mu} \quad \text{et } \gamma = \beta/\mu.$$

Est-elle une équation d'onde ? C'est à dire, peut-on trouver une solution de type $f(\omega t \mp kx)$? La réponse est oui si le nombre d'onde k est considéré comme un nombre complexe, $k \in \mathbb{C}$.

Exercice 8.11. Comme une solution de l'équation obtenue ci-dessus, essayez la fonction

$$f(t, x) = A \exp(i(\omega t - kx)),$$

et trouvez la relation entre k et (ω, Γ, v) . Considérez la limite de faible atténuation. Précisez la définition quantitative de cette limite (i.e., trouvez le petit paramètre $\epsilon \ll 1$). Faites le comparaisn avec le cas des vibrations atténuées.

Solution. Suite au calcul des dérivées on obtient

$$-\omega^2 f + i\omega\gamma f = -k^2 v^2 f \quad \Rightarrow \quad k = \pm \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - i \frac{\gamma}{\omega}} \in \mathbb{C}$$

Dans la limite de faible atténuation $2\epsilon = \gamma/\omega \ll 1$. On écrit

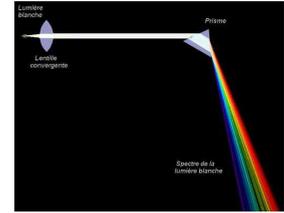
$$k = \pm \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2} \exp(-i\phi/2) \quad \text{où } \phi = \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right) \approx \frac{\gamma}{\omega} \\ \approx \pm \frac{\omega}{v} \left(1 - i \frac{\gamma}{2\omega}\right)$$

Alors la condition $\text{Re } k / \text{Im } k = \epsilon \ll 1$ signifie que dans une longueur $|\text{Im } k|^{-1} = 2v/\gamma$ s'insèrent plusieurs longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/|\text{Re } k|$. Faites le dessin de la fonction d'onde $f(\omega t - kx) = \exp(i\omega t - i(\text{Re } k)x) \exp(-(\text{Im } k)x)$.

Exercice 8.12. Revenez à la sec. 6.2 et ajoutez la *force de frottement* «locale» avec un coefficient $2\gamma m_i$ à chaque oscillateur i de la chaîne dans la fig. 7. Obtenez l'équation d'onde correspondant, et précisez le rapport entre son paramètre d'atténuation β et le coefficient de l'amortissement «locale» γ .

9 Ondes dispersives

Rappels. Dispersion en optique Indice de réfraction n , que signifie-t-il ? Lumière monochrome : la relation entre couleur, fréquence ν et la longueur d'onde λ . Dispersion (décomposition) de la lumière blanche à travers d'un prisme.



Prisme

Dispersion, corde Retournez à l'équation de la corde (sec. 8.1.1). Si la corde est courbée, à chaque son point, elle possédera un moment²³ de pliage (ou *torque*). Pour l'angle de pliage $\partial f / \partial x$, l'équivalent de la loi d'Hooke pour la déformation linéaire nous donne

$$\tau(x) = -k_t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{avec } k_t > 0.$$

Donc le torque est proportionnel à la courbure avec un coefficient négatif, signifiant que une corde pliée *tente de se replier*. Ce torque correspond à une force de réaction perpendiculaire à la corde et donc dirigée quasi-verticalement²³

$$F_t \approx \frac{\partial \tau}{\partial x} = -k_t \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

En considérant la somme des forces à deux extrémités du segment dx on trouve

$$dF_t = \frac{\partial F_t}{\partial x} dx - k_t \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

Comme dans le cas d'atténuation (sec. 8.1.9), cette force doit être ajoutée à l'équation de la corde (8.1). Nous avons ainsi l'équation d'onde nonlinéaire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{t,x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t,x} = v^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{t,x} + 2d \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_{t,x} \right] \quad \text{avec } d = -\frac{1}{2} k_t v^2.$$

Exercice 9.1 (relation de dispersion). Nous ne pouvons plus assurer que n'importe quelle fonction $f(t \mp x/v)$ peut satisfaire cette équation, car une relation entre ω et k nous sera imposée. Essayez une fonction particulière

$$f(t - x/v) = A \exp(i\omega t - ikx)$$

Trouvez la relation entre ω et k , appelée la *relation de dispersion*. Considérez le cas de faible dispersion.

Solution. Suite au calcul des dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\omega f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -k^2(-ik)f, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = k^4 f$$

on obtient

$$\omega = \pm v k \sqrt{1 - 2dk^2} \quad \text{et} \quad v_\phi = \frac{\omega}{|k|} = v \sqrt{1 - 2dk^2},$$

où $v_\phi = v_\phi(k)$ est appelée *vitesse de phase*. Pour $d > 0$ (et bien sur $2dk^2 < 1$) elle est inférieure à la vitesse de propagation v . Soit $\epsilon = 2dk^2 \ll 1$ (condition de faible dispersion). En développant, on obtient la forme standard de la relation de dispersion

$$\omega \approx v k - d v k^3$$

Dispersion normale et anormale En optique, nous utilisons l'indice de réfraction²⁴ du milieu $n = c/v_\phi$ avec c la vitesse (célérité) de la lumière dans le vide et $v_\phi = v_\phi(\lambda) = v_\lambda$ sa vitesse dans le milieu. Cela implique, que la fréquence $\nu = v_\phi/\lambda$ n'est pas affectée. En utilisant notre expression pour la vitesse de phase, on obtient l'*équation de Cauchy*

$$n_k = \frac{c}{v_\phi} = \frac{c}{c \sqrt{1 - 2dk^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2dk^2}} \approx 1 + dk^2 + \frac{3}{2} d^2 k^4 + \dots \quad (9.1)$$

Les cas de $d > 0$ et $d < 0$ correspondent à la dispersion normale ($n_\lambda > 1$) et anormale. Les valeurs caractéristiques de n_λ à $\lambda = 589 \text{ nm}$ (doublet de sodium) sont données ci-dessous.

| | | | |
|--------------------|----------|-----------------------|------|
| vacuum | 1 | quartz fondu | 1.46 |
| l'air (0°C, 1 atm) | 1.000293 | verre de fenêtre | 1.5 |
| l'eau à 20°C | 1.333 | verre flint (typique) | 1.7 |
| glace | 1.31 | diamant | 2.42 |

Pour la plupart des matériaux, elles ne varient que de quelques pourcentages dans tout le spectre visible, et habituellement, la forme simple de (9.1) à deux termes suffit

$$n_\lambda = A + B \lambda^{-2} = 1 + dk^2, \quad \text{avec } A = 1 \text{ et } B = d(2\pi)^2.$$

²³Rappelez que par rapport au point O le moment \vec{M} de la force \vec{F} appliquée dans le point O' est un vecteur $O\vec{O}' \wedge \vec{F}$. Ici on considère le torque $\partial \tau$ par rapport au point $O = x$ avec $|O\vec{O}'| = \partial x$; la direction de $O\vec{O}'$ est presque le long de l'axe x et \vec{F} se rapproche à la verticale.

²⁴introduite par *Thomas Young* en 1807

Refraction, loi de Snell Tout onde (lumière) traversant une frontière (surface) entre deux milieux et passant d'une région avec l'indice n_1 vers une autre avec l'indice $n_2 \neq n_1$ change sa direction de propagation. L'angle d'incidence (l'angle entre la direction de propagation dans le milieu 1 et la normale \vec{e}_z à la frontière) θ_1 et l'angle de refraction θ_2 (l'angle entre la direction de propagation dans le milieu 2 et \vec{e}_z) satisfont l'équation de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (9.2)$$

Exercice 9.2. Obtenez (9.2) pour le cas $n_1 = 1$ (l'air) et $n_2 > 1$ (l'eau, le verre, etc) et les ondes planes.

Dispersion, ondes stationnaires Revenez à l'exemple d'une corde de longueur L fixée à deux extrémités (guitare) dans la sec. 8.1.1 et l'exercice 8.3. Supposez que ν_1 , la fréquence fondamentale, est accordée, par exemple, à 440 Hz (note La de la 3ème octave). Les conditions aux limites impliquent que les vecteurs d'onde sont

$$k_i = i \frac{\pi}{L}, \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, \dots$$

Quelles sont les fréquences des harmoniques $i = 2, 3, 4, \dots$ si le milieu est dispersif? On obtient

$$2\pi\nu_i = \omega_i = v k_i - d v k_i^3 \quad \Rightarrow \quad \nu_i = \frac{v}{2L} i - \frac{d v \pi^2}{2L^3} i^3 = \nu_1 i \left(1 - \frac{d \pi^2}{L^2} i^2 \right).$$

Ainsi il est pratique d'étudier la quantité $\nu_i/(i\nu_1)$ comme une fonction quadratique de la variable $\xi = i\pi/L$.

Exercice 9.3. Combinez les effets de la dispersion et faible atténuation. Donnez la solution.

Questionnaire éclair de la rentrée

Répondez, svp, sur cette feuille et au verso s'il vous est nécessaire.

Prénom/Nom

D'où, de quelle formation venez vous ?

Votre moyenne en physique

Votre moyenne en math

Que voulez vous faire après L3 ?

Que attendez vous du cours «Vibrations» ? En quoi ce cours vous peut être utile ?

Répondez, svp, aux questions seulement si vous savez les réponses ! Vous avez 20 minutes.

Problème 1 Soit a et b des nombres réels, $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$z = a + ib, \quad z \in \mathbb{C},$$

un nombre complexe. On considère la représentation de Euler

$$z = |z| \exp(i\varphi), \quad |z| \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{et} \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

avec $|z|$ un nombre réel non-négatif, et angle $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Comment appelle-t-on $|z|$ et φ ? Exprimez $|z|$, $\tan \varphi$, $\cos \varphi$, et $\sin \varphi$ en fonction de a et b .

Problème 2 On considère au présent une fonction réelle

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$$

du temps t , telle que

$$dx/dt := \dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Quelle est la forme explicite de $x(t)$? Quelle est son allure pour $a > 0$? Pour $a < 0$? Quelle est la valeur $x(0)$.

Problème 3 On considère deux autres fonctions réelles

$$y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y_1(t) \quad \text{et} \quad y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y_2(t)$$

du temps t , telles que

$$\ddot{y}_1 = -\omega^2 y_1 \quad \text{et} \quad \ddot{y}_2 = \omega^2 y_2, \quad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Quelle peut être la forme explicite de $y_1(t)$ et $y_2(t)$? Combien y-a-t-il des solutions indépendants dans chaque cas ?

Problème 3* Au présent, trouvez la solution $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour le système

$$\ddot{y}_1 = -\omega^2 y_1 \quad \text{et} \quad \ddot{y}_2 = \omega^2 y_1, \quad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Problème 4 Enfin on considère une fonction complexe

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto z(t)$$

du temps réel t , telle que

$$d^2 z/dt^2 := \ddot{z} = -\omega^2 z, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Donnez la forme explicite de $z(t)$. Considérez des cas différents pour des valeurs $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$, $i\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et une valeur générique avec $\text{Im} \omega \neq 0$ et $\text{Re} \omega \neq 0$. Comparez au problème 3.

Problème 5 On se rapproche enfin de notre sujet. Considérez un ressort sans poids. Sa longueur est l , et sa constante de raideur est k . Le ressort est suspendu verticalement au plafond de l'hauteur h , et à son bout bas libre on attache un corps ponctuel de masse m . On laisse le corps vibrer en le long de l'axe vertical z autour du point z_0 . Quel est la valeur de z_0 si le plancher est situé au $z = 0$. Faites un dessin.

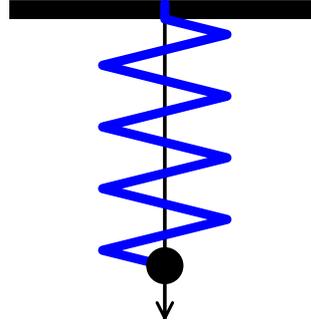
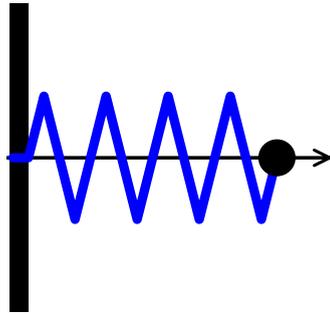
Questionnaire éclair : oscillations harmoniques libres

Prénom/Nom

Répondez, svp, sur cette feuille et au verso s'il vous est nécessaire.

Répondez, svp, aux questions seulement si vous savez les réponses ! Vous avez 15 minutes.

Problème 1 Considérez deux systèmes (a) et (b) à 1 degré de liberté composés chacun d'un ressort de rigidité k avec un bout fixe, et avec une masse ponctuelle m attachée au bout libre. Dans le cas (a) le ressort est posé horizontalement sur un plan, dans le cas (b) il est suspendu verticalement. Il n'y a pas de friction, ni d'autres pertes, mais on tient compte, bien sûr, de la force pesanteur. Quelle est la pulsation propre ω_0 des oscillations libres dans chaque cas ?



Problème 2 On considère une fonction réelle

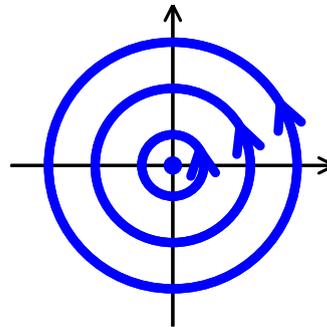
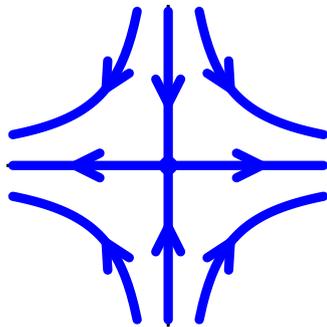
$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$$

du temps réel t , telle que

$$d^2x/dt^2 := \ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Au moment $t = 0$, les valeurs initiales sont $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$. Trouvez $x(t)$.

Problème 3 Lequel des deux systèmes dont le portrait de phases est présenté sur la figure ci-dessous est stable ? instable ?



Questionnaire éclair : représentation matricielle

Prénom/Nom

Répondez, svp, sur cette feuille et au verso s'il vous est nécessaire.

Répondez, svp, aux questions seulement si vous savez les réponses ! Vous avez 15 minutes.

Problème 1 Considérez l'équation différentielle ordinaire de deuxième ordre

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

qui représentent les oscillations harmoniques. Comment peut-on remplacer cet équation par un système des équations de premier ordre. Combien équations de premier ordre a-t-on besoin ? Quelle est la représentation matricielle de ce système.

Problème 2 Donnez la forme matricielle correspondant à l'équation différentielle ordinaire de deuxième ordre

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{avec } \gamma, \omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Problème 3 Trouvez les valeurs propres de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Quelle est la relation entre $\det A$ et les valeurs propres de A ?

Questionnaire éclair : oscillations harmoniques libres amorties

Problème 1 Le mouvement d'un système à un degré de liberté est décrit par l'équation différentielle de 2ème ordre

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{et} \quad \gamma := \frac{\omega_0}{2Q}$$

Pour $Q = 1$, trouvez la solution particulière $x(t) : t \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$x(0) = 1 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -1$$

En sachant que l'énergie cinétique T et potentielle V du système sont, respectivement,

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}kx^2, \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{k/m},$$

trouvez l'évolution de l'énergie totale $T + V$ du système.

Problème 2 Considérez le cas $Q = 1/4$ et trouvez la solution et l'énergie du système pour les mêmes conditions initiales.

Questionnaire : fonctions d'une et de plusieurs variables

Problème 1. Considérez la fonction connue en physique comme potentiel de Lennard–Jones

$$f_{\text{LJ}} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{b}{x^{12}} - \frac{a}{x^6}, \quad \text{avec } b, a > 0.$$

Quelle est l'image de cette fonction dans \mathbb{R} ? Tracez le graph de $f_{\text{LJ}}(x)$. Possède-t-elle un (ou plusieurs) point(s) stationnaire(s) ? Si oui, trouvez le(s). Exprimez la coordonnée x_0 de ce point et la valeur stationnaire $f_{\text{LJ}}(x_0)$ en terme de a et b . En supposant que x est la distance entre deux molécules, et que $f_{\text{LJ}}(x)$ donne l'énergie d'interaction moléculaire, trouvez l'énergie de dissociation D de l'agrégat. En développant $f_{\text{LJ}}(x)$ au voisinage de x_0 ,

$$f_{\text{LJ}}(x) \approx f_{\text{LJ}}(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \dots$$

trouvez la *constante de rigidité* k (constante de force) du lien entre les molécules comme fonction de a et b . Enfin, exprimez a et b en fonction de D et k .

Problème 2. Considérez la fonction connue en physique comme potentiel de Hénon–Heiles

$$f_{\text{HH}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x, y)^2 + \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - xy^2), \quad \text{avec } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Quelle est l'image de cette fonction dans \mathbb{R} ? Calculez ∇f_{HH} . La fonction f_{HH} , possède-t-elle un (ou plusieurs) point(s) stationnaire(s) ? Si oui, trouvez et caractérisez le(s). Dans le plan $\mathbb{R}_{x,y}^2$, tracez les lignes des niveaux constantes (représentation «cartographique») de $f_{\text{HH}}(x, y)$. Dans le(s) point(s) stationnaire(s) (x_0, y_0) trouvez les valeurs stationnaires $f_{\text{HH}}(x_0, y_0)$. Pour le(s) point(s) stable(s), trouvez le(s) constante(s) de rigidité k_x et k_y . Considérez les applications $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dites *opérations de symétrie*. Existe-t-il une (ou plusieurs) opérations g pour laquelle (lesquelles) f_{HH} reste invariante, c'est à dire $f \circ g \equiv f$.

Problème 3. Dans l'espace \mathbb{R}^3 , considérez le système de trois charges électriques ponctuels placés dans r_1, r_2, r_3 (pensez d'une molécule H_3). Le potentiel Coulombien créé par chaque charge est $1/\|r - r_i\|$. Soit r_1, r_2, r_3 forment un triangle équilatéral dans le plan $(x, y, 0)$. Pour la fonction potentielle du système f , trouvez ∇f . Montrez que f possède un point critique x_0 au milieu du triangle. Caractérisez ce point. Pour un trinagle assez grand, développez f dans x_0 jusqu'à les termes réfléchissant la symétrie du système.