

Magnétostatique
Loi de Biot-Savart, Bobines d’Helmholtz, Solénoïde

I But du TP :

Le but de ce TP est, d’une part, l’étude du champ magnétique créé le long de l’axe de spires de bobines métalliques de différentes dimensions ou de solénoïde quand ils sont parcourus par un courant électrique continue. Notre premier objectif est de vérifier si ce champ magnétique suit bien la loi de Biot-Savart.

D’autre part, nous allons étudier la distribution du champ magnétique créée par une association de deux bobines plates le long de leur axe en fonction de leur espacement. La disposition d’Helmholtz de la paire des deux bobines, c’est à dire, l’espacement entre les deux bobines pour lequel le champ magnétique axial est uniforme entre ces deux bobines, sera expérimentalement déterminée.

Nous allons aussi étudier l’influence sur le champ magnétique à l’intérieur du solénoïde :

- de l’intensité I du courant
- du nombre n de spires par unité de longueur
- de la longueur L du solénoïde

II Bases Théoriques :

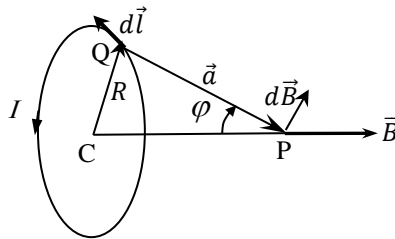


Figure 1 : Champ magnétique créée par une spire métallique le long de son axe.

Le champ magnétique créée par un élément $d\vec{l}$ d’une spire métallique, de centre C et de rayon R parcourue par un courant I , en un point P situé sur son axe est donné par la loi de Biot-Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{a}]}{a^3}, \quad (1)$$

où $\vec{QP} = \vec{a}$, $a = |\vec{a}|$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$

On montre que la composante axiale (selon l’axe de la spire) du champ magnétique s’écrit :

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} dl \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2)$$

z étant l’abscisse du point P ($CP = z$). Le champ magnétique axial total en P est obtenu en intégrant sur tous les éléments dl . On obtient alors :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Le champ magnétique créée au centre de la spire est obtenu en posant $z=0$:

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (4)$$

Pour une bobine constituée d'un nombre N relativement faible de spires très rapprochées, le champ magnétique créé en un point de son axe d'abscisse z est donné par l'expression :

$$B(z) = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5)$$

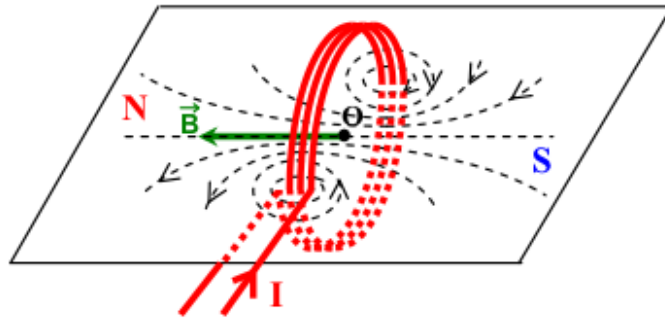


Figure 2 : Champ magnétique créé par une bobine.

Au centre de la bobine, le champ magnétique créé est :

$$B(0) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \quad (6)$$

S'il s'agit de l'association de deux bobines plates de N spires, disposées à une distance a l'une de l'autre, et parcourues dans le même sens par un courant I (voir Figure 3), les champs magnétiques créés par les deux bobines en un point P de leur axe s'ajoutent.

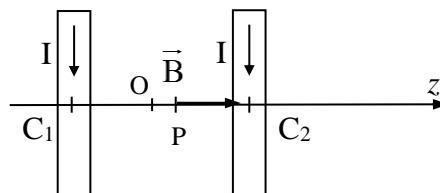


Figure 3 : Champ magnétique axial créée par une paire de bobines.

Posons $C_1 C_2 = a$ et $OP = z$; et soit $C_1 P = a/2 + z$, $C_2 P = a/2 - z$

On obtient alors :

$$B(z) = \frac{\mu_0 NI}{2} R^2 \left[\left(R^2 + \left(\frac{a}{2} + z \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \left(R^2 + \left(\frac{a}{2} - z \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (7)$$

Le champ magnétique a l'extrémum (la condition indispensable) quand :

$$\left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) = \frac{\mu_0 NI}{2} R^2 \left[-3 \left(z + \frac{a}{2} \right) \left(R^2 + \left(\frac{a}{2} + z \right)^2 \right)^{-\frac{5}{2}} + 3 \left(\frac{a}{2} - z \right) \left(R^2 + \left(\frac{a}{2} - z \right)^2 \right)^{-\frac{5}{2}} \right] = 0 \quad (8)$$

Ceci est vrai pour $z=0$ pour n'importe quel a et R .

Au voisinage de $z=0$, le champ magnétique est pratiquement constant quand :

$$\left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right) = \frac{3\mu_0 NI}{2} R^2 \left[-\left(R^2 + \left(\frac{a}{2} + z\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 5\left(\frac{a}{2} + z\right)^2 \left(R^2 + \left(\frac{a}{2} + z\right)^2\right)^{-\frac{7}{2}} \right. \\ \left. - \left(R^2 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 5\left(\frac{a}{2} - z\right)^2 \left(R^2 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^2\right)^{-\frac{7}{2}} \right] = 0 \quad (9)$$

Cette équation devient pour $z=0$:

$$\left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 3\mu_0 NI R^2 \frac{(a^2 - R^2)}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)} = 0. \quad (10)$$

Ceci est vrai quand $a=R$. Le champ magnétique varie alors très lentement au voisinage de O autour de sa valeur maximum $B(0)$ pour une distance $a=R$ séparant les deux bobines. Dans ce cas les deux bobines s'appellent les bobines d'Helmholtz.

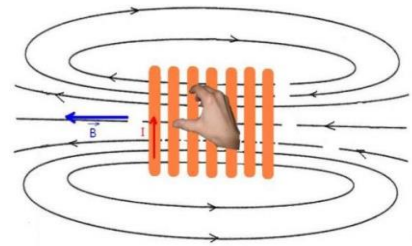
Quand $a = R$:

$$B(0) = \frac{\mu_0 NI}{R} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

La valeur du champ au centre du solénoïde de longueur infinie est

$$B = \mu_0 n I, \quad (12)$$

où $n = \frac{N}{L}$ est le nombre de spires par mètre, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (ou $[\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$ ou $[\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}]$), L est la longueur de solénoïde. La direction du champ pour solénoïde et pour les bobines peut être définie par la règle de la main droite (voir la figure ci-contre): La main droite, pouce écarté, tient le solénoïde. Le courant sort par les doigts et le pouce oriente le vecteur champ magnétique.



III Matériels utilisés :

Vous disposez pour ce TP des matériels suivants :

- 3 spires de différents rayons (3, 4,25 et 6 cm),
- 2 petites bobines de même rayon ($R=6$ cm). L'une d'entre elles contient 2 spires et l'autre 3 spires.
- 2 bobines plates contenant chacune un nombre de spires $N=154$ (à Dunkerque) ou $N=100$ (à Calais). Leur rayon moyenne est $R=20$ cm (à Dunkerque) et $R=6.25$ cm (à Calais).
- un solénoïde de longueur variable, $n = 485$ spires par mètre (à Dunkerque) et $n = 900$ spires/m (à Calais).
- Une alimentation continue réglable avec une sortie 5A ou avec deux sorties 2.5A.
- Un multimètre numérique permettant la mesure de l'intensité du courant électrique.
- Une sonde Hall axiale permettant la détection du champ magnétique. Cette sonde est raccordée à un teslamètre numérique qui permet de mesurer de façon précise l'induction magnétique.

N.B. La sonde mesure la projection d'un champ magnétique B sur son axe. Durant les mesures, faites attention que la sonde est strictement perpendiculaire aux axes des spires.

IV Partie expérimentale :

A. Champ de spires avec courant

On n'utilisera pour cette partie du TP que les 2 petites bobines (avec 2 spires et 3 spires), ainsi que les 3 spires de différents rayons.

Etude du champ magnétique créée au centre de la bobine.

Variation du champ avec le nombre des spires:

- Pour éviter des problèmes liés aux dérives éventuelles du zéro du teslamètre au moment des relevés des mesures, il est conseillé d'allumer d'abord l'appareil et raccorder la sonde 10 mn avant de commencer à réaliser vos mesures.
- Faites un montage en série contenant la spire de rayon 6 cm, l'alimentation continue ainsi que le multimètre pour les mesures du courant.
- Avant de mettre l'alimentation sous tension, veillez d'abord à ce que les boutons de réglage de tension et de courant soient à zéro.
- Placer la sonde Hall au centre de la spire. Procéder au réglage du zéro du teslamètre.
- Mettre sous tension le générateur, et régler les boutons tension et courant de façon à alimenter la spire avec un courant maximal, (**mais ne dépasser pas 5A**). Vous pouvez, pour un réglage plus fin de I , vous aidez du multimètre. Pour monter le courant jusqu'à 5A nous pouvons utiliser le deuxième sorti de source de courant (s'il existe).

A.1 Relever le champ $B_{mes}(0)$ créée au centre de la spire et évaluer l'incertitude ΔB_{mes} . Pour évaluer ΔB , il faut tenir compte de la précision du teslamètre et des fluctuations éventuellement observées. Avant d'éteindre l'alimentation, remettre d'abord les boutons de réglage de la tension et du courant à zéro. Remplacer successivement la spire par les deux bobines de même rayon, et de nombre de spires $n=2$ et 3. Pour chaque bobine, refaire la même démarche expérimentale décrite ci-dessus et relever pour chacune d'elle le champ magnétique $B(0)$ créée en son centre.

A.2 Tracer sur papier millimétré $B_{mes}(0)$ comme la fonction de n . Ajouter sur la figure les **barres d'erreur** de mesures. Tracer aussi sur la même feuille la courbe théorique $B_{th}(0)$ (toujours avec les barres d'erreur) afin que vérifiez que la relation (6) donnant l'expression théorique de B au centre d'une bobine expérimentalement vérifiée en n . Est-ce que cette courbe théorique correspond aux mesures?

Rappel : Pour les calculs des erreurs des expressions théoriques, vous pouvez utiliser la méthode de propagation d'erreur.

A.3 Estimer le maximal pourcentage d'erreur de mesure de champ magnétique, si la sonde est mal positionnée et l'angle entre la sonde du teslamètre et l'axe d'une bobine atteint 10° .

Variation du champ avec le rayon des spires:

A.4 En adoptant toujours le même protocole expérimental décrit précédemment, mesurer successivement $B(0)$ au centre des spires de rayons respectifs $R=3$ cm, 4.25 cm et 6 cm.

A.5 Tracer sur papier millimétré $B_{mes}(0)$ en fonction de (I/R) avec les rectangles d'erreur.

A.6 Comme dans la partie précédant vérifier la validité de la loi de Biot-Savart (6) donnant le champ magnétique créée au centre d'une bobine en R .

Détermination de μ_0 :

A.7 A partir des deux courbes tracées et en utilisant l'équation (6), calculer la valeur de la constante $\mu_{0,exp}$ en unité S.I. (préciser l'unité). Estimer l'erreur $\Delta \mu_{0,exp}$, comparer avec la valeur théorique.

Mesure de la distribution spatiale du champ magnétique créé par une bobine le long de son axe.

Vous utiliserez pour cette partie du TP une bobine plate de rayon moyenne $R=20$ cm et de nombre de spires $N=154$ (à Dunkerque) ou de rayon moyenne $R=6.25$ cm et $N=100$ (à Calais).

- Placer la sonde du teslamètre au centre de la bobine ; la plaquette du capteur doit être orientée perpendiculairement au champ magnétique créé par la bobine : elle doit donc être perpendiculaire à l'axe de la bobine ; régler le zéro du teslamètre en l'absence de courant dans la bobine.
- Réaliser le montage pour alimenter la bobine en courant.
- Régler le courant maximale en veillant à **ne pas dépasser un courant maximum de 5A**.

A.8 Mesurer B à différentes distances z du centre de la bobine sur l'axe de cette bobine (procéder, par exemple, par pas de 3 cm pour z variant de -30 à +30 cm à Dunkerque et par pas 1 cm entre -10 à +10 cm à Calais).

A.9 Tracer sur papier millimétré $B_{mes}=f(z)$ avec les **rectangles d'erreurs**.

A.10 Commenter cette courbe. Ce résultat est-il en accord avec ce que prévoit la loi de Biot-Savart (voir équation (5)) ? En utilisant l'expression (5), calculer la valeur théorique, $B_{théo}(0)$ (ainsi que l'erreur); est-elle en accord avec la valeur expérimentale ? Marquer cette valeur sur le papier millimètres

B. Paire de bobines, solénoïde

Mesure du champ magnétique créé par une paire de bobines

Nous allons à présent nous intéresser à l'étude du champ magnétique créé le long de l'axe z par deux bobines identiques espacées d'une distance a . En particulier, nous allons étudier l'influence de la distance a sur la distribution axiale du champ magnétique.

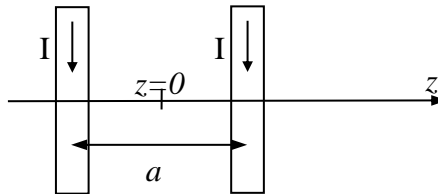


Figure 3. Deux bobines.

Les deux bobines sont branchées en série en choisissant la polarité de façon à ce que les champs magnétiques des deux bobines se cumulent (à vérifier). Régler le courant I à 3,5A.

- B.1 Pour des valeurs de $a = R/2, R$ et $2R$, mesurer le champ magnétique pour différentes valeurs de $z \in [-a - R, a + R]$, $z=0$ au milieu des bobines. Comment choisir la résolution spatiale de ces mesures (le pas des mesures) ?
- B.2 Tracer sur le même papier millimétré les courbes $B_{mes}(z)$ correspondants aux différentes valeurs de a (n'oubliez pas les rectangles d'erreurs), marquer les positions des bobines.
- B.3 Pour quelles valeurs de a a-t-on un champ magnétique quasi-uniforme entre les deux bobines ?
- B.4 Ce résultat expérimental est-il conforme avec ce que prévoit la théorie ? Comment pouvons-nous vérifier théoriquement que $z=0$, c'est bien le maximum de $B(z)$ pour ce valeur de a (les conditions indispensable et suffisante) ?
- B.5 Calculer les valeurs théoriques de ce champ en $z=0$, prévue par l'expression (7), pour les valeurs différents de a , et les comparer à ses valeurs expérimentales. Conclusion ? Marker les sur le papier millimétré.

- B.6 Si les deux bobines étaient parcourues par des courants de sens contraires, quelle valeur de champ magnétique nous obtiendrions en $z=0$? Que peut-on dire du champ magnétique créé sur l'axe entre les deux bobines (symétrie) ?

Mesure du champ magnétique créé par un solénoïde

Relation entre B et I au centre du solénoïde E

- Placer la sonde du teslamètre au centre du solénoïde; la plaquette du capteur doit être orientée perpendiculairement au champ magnétique créé par le solénoïde: elle doit donc être perpendiculaire à l'axe de la bobine ; régler le zéro du teslamètre en l'absence de courant dans la bobine.

- Alimenter la solénoïde E entre les deux bornes noires, en veillant à ne pas dépasser $I_{\max} = 5A$.

- B.7 Pour chaque valeur de I , relever le champ B_{mes} correspondant et évaluer les incertitudes ΔI et ΔB_{mes} ; pour évaluer ΔB_{mes} , il faut tenir compte de la précision du teslamètre et des fluctuations éventuellement observées; faire les mesures nécessaires pour tracer correctement le graphe. Faire un tableau de mesures avec I , ΔI , B_{mes} et ΔB_{mes} . Compte tenu des incertitudes, quelle relation peut-on écrire entre B et I ?

- B.8 Tracer sur papier millimétré les courbes expérimental B_{mes} et théorique B_{th} comme les fonctions de courant I , en faisant apparaître les rectangles d'erreur. B_{th} c'est l'expression théorique du champ au centre du solénoïde de longueur infinie. Conclusions?

Comment varie B le long de l'axe du solénoïde à I constante

N.B. L'expression (12) est valide au centre d'un solénoïde infiniment long. Nous allons vérifier applicabilité de cette loi au bout du notre solénoïde et pour le solénoïde de la longueur finie (dernier partie du TP).

- Fixer l'intensité $I = 3 A$ dans l'enroulement. La longueur du solénoïde est fixée. On cherche à mesurer B au point M situé sur l'axe du solénoïde à la distance $x_M = AM$ de l'extrémité A du solénoïde.

- B.9 Faire les mesures nécessaires, sans oublier d'évaluer les incertitudes Δx et ΔB , puis tracer le graphe $B = f(x)$. Marque les points A et O (l'extrémité et le centre du solénoïde).

- B.10 A quelle distance du bord le champ magnétique a-t-il chuté de 10 % de la valeur au centre du solénoïde ? Marquer cette point M_{cr} , noter aussi la valeur théorique du champ B_{th} , estimer valeurs x_M et Δx_M .

Influence de la longueur L du solénoïde

On cherche à savoir à partir de quelle longueur du solénoïde on peut calculer le champ au centre avec la relation (12) en admettant un écart de 5%.

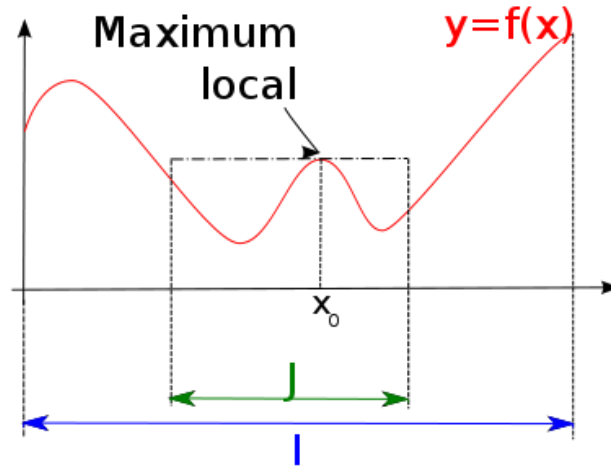
- B.11 Proposer un mode opératoire et le soumettre au professeur.

- B.12 Faire les mesures nécessaires, tracer la figure et conclure.

Annexe. Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- $f(x_0)$ est un maximum local de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que pour tout $x \in J \cap I$: $f(x) \leq f(x_0)$.



Voilà une définition similaire pour un minimum local :

- $f(x_0)$ est un minimum local de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que pour tout $x \in J \cap I: f(x) \geq f(x_0)$.
- on rassemble maximum et minimum sous le qualificatif extremum.

Théorème 1.

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel intérieur à I . Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.

Attention! La réciproque de ce théorème est fausse, voir l'exemple de la fonction cube!

Si la fonction f atteint un extremum local en un point x_0 où elle est différentiable, alors toutes ses dérivées partielles s'annulent en x_0 .

Pour cette raison, l'étude des extrema passe souvent par la recherche des points d'annulation de la dérivée, appelés points critiques de f . Un point critique n'est pas nécessairement un point d'extremum.

Théorème 2.

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel intérieur à I . Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .

Exemple

Soit la fonction polynomiale $f(x) = 2x^3 - 3x^3 - 12x + 10$. Utilisons le test de la dérivée première pour obtenir les extremums de f .

Calcul de la dérivée et recherche des zéros : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1) \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$. Donc, la tangente est horizontale en $x = 2$ ou en $x = -1$.

La fonction dérivée est ici un polynôme du second degré. Son signe est donc caractérisé par ses racines et son coefficient dominant (ici : 6, positif). Ainsi, la dérivée est négative entre les zéros et positive ailleurs.

Tableau de valeurs

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	17	↘	-10	↗	$+\infty$

Donc, comme 17 se trouve dans un « pic » de la fonction, c'est un maximum local. Et comme -10 se trouve dans un « creux » de la fonction, c'est un minimum local.