Etude des oscillations libres et forcées du pendule de Pohl

I/ Le pendule de Pohl

Le pendule de Pohl est constitué par une roue et par un ressort en spirale attachés à un axe de rotation commun (voir figure 1). La roue ne peut tourner autour de l'axe qu'en induisant la force de torsion d'origine élastique dans la spirale qui s'oppose au mouvement de la roue. En position d'équilibre, la spirale n'exerce aucune force élastique et le pendule est immobile. Ecartée de cette position et abandonnée à elle-même, la roue est ramenée vers sa position d'équilibre par la force de rappel générée dans la spirale. Mais, en revenant la roue atteint une vitesse non nulle à la position d'équilibre et la dépasse pour s'en écarter jusqu'à l'annulation de sa vitesse ; Elle revient de nouveau vers sa position d'équilibre et ainsi de suite

Figure 1 : *Le pendule de Pohl*

Le pendule de Pohl représente donc un oscillateur qui possède un degré de liberté car il est astreint à tourner dans un plan vertical. La position du pendule est entièrement déterminée par un angle de rotation ϕ qu'on peut mesurer à l'aide d'une flèche attachée à la roue oscillante, par rapport au cadran immobile derrière le pendule. En position d'équilibre la flèche indique le zéro sur le cadran.

L'amplitude des oscillations du pendule livré à lui-même décroît avec le temps à cause des frottements, de la résistance de l'air, etc. Pour étudier systématiquement l'effet de la force d'amortissement sur les oscillations, la roue du pendule oscille entre les pôles d'un électro-aimant qui freine le mouvement du pendule en générant des courants de Foucault dans la roue (voir cours *Effets magnétiques*). On peut modifier la force d'amortissement en changeant la valeur du courant qui alimente l'électro-aimant.

Un oscillateur mis en mouvement et livré ensuite à lui-même s'appelle *un oscillateur libre.* Si l'oscillateur est soumis à une force extérieure, on parle d'*oscillations forcées*. Dans le dispositif du pendule de Pohl, la force extérieure *périodique* est générée par la rotation du disque de l'électromoteur transmise au bout de la spirale par une tige horizontale et verticale. La flèche attachée au bout de la spirale permet de suivre les oscillations de la force extérieure. On peut faire varier la vitesse de rotation du disque de façon continue à l'aide boutons sur la boite du moteur. La vitesse est contrôlée par la tension du courant d'alimentation qu'on peut mesurer directement avec un multimètre branché aux bornes du moteur.

II/ L'analyse théorique des oscillations

Les oscillations libres

A partir du théorème des moments, on peut montrer que l'équation du mouvement dans le cas d'une rotation s'exprime par :

$$I\ddot{\alpha} = M_s + M_a \qquad (1)$$

avec I : moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation
$\ddot{\alpha}$: l'accélération angulaire autour de cet axe
M_s : le moment de la force de torsion de la spirale
M_a : le moment de la force de freinage par les courants de Foucault

les moments M_s, M_a s'écrivent :

$$M_s = -D\alpha \qquad (2)$$

$$M_a = -C\dot{\alpha} \qquad (3)$$

où : D : la constante de torsion de la spirale
C : un facteur qui dépend du courant fourni aux freins électromagnétiques

Notez que le moment de la force de rappel de la spirale est proportionnel à l'amplitude de la déviation du pendule par rapport à sa position d'équilibre, tandis que l'amortissement est proportionnel à la vitesse de sa rotation.

D'après (2),(3) l'équation (1) s'écrit :

$$I\ddot{\alpha} + C\dot{\alpha} + D\alpha = 0 \qquad (4)$$

Divisons l'équation (4) par I et posons $\omega_0^2 = \dfrac{D}{I}$, ω_0^2 représentant la pulsation des oscillations sans amortissement, appelée *<u>pulsation propre</u>* du pendule, et $\delta = \dfrac{C}{2I}$ appelé le coefficient d'amortissement. Il vient :

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

(5)

Les solutions de l'équation (5) dépendent du signe discriminant :

$$\Delta = 4(\delta^2 - \omega_0^2) \qquad (6)$$

Pour $\Delta < 0$ la solution de (5) s'écrit :

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

(7)

Elle correspond aux oscillations décroissantes qui se répètent avec la pulsation

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (8)$$

Si δ est supérieur ou égal à la fréquence propre ω_0, le discriminant devient $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$, le mouvement du pendule ne constitue plus à proprement parler un oscillateur car il revient vers la position d'équilibre sans oscillations autour de celle-ci.

Comme l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement (à cause de $e^{-\delta t}$), la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est appelée parfois pseudo période.

De (6) on peut montrer que le rapport des amplitudes des oscillations du pendule à deux instants séparés par une pseudo période T est constant :

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha(t+T)} = e^{\delta T} \qquad (9)$$

Le logarithme népérien de ce rapport est appelé *<u>décrément logarithmique</u>* λ des oscillations avec amortissement :

$$\lambda = \delta T \qquad (10)$$

<u>Les oscillations forcées</u>

Dans ce cas le pendule est mis en mouvement par la force extérieure dont le moment est égal à :

$$M_{ext} = M_0\cos(\omega t) \qquad (11)$$

En posant $m_0 = M_0 / I$ l'équation du mouvement (5) s'écrit :

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = m_0 \cos(\omega t) \tag{12}$$

La solution de cette équation à la forme :

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \theta) \tag{13}$$

Le déphasage θ entre le déplacement et la force appliquée est donnée par :

$$tg\,\theta = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{14}$$

Et l'amplitude α_0 des oscillations :

$$\alpha_0 = \frac{m_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \tag{15}$$

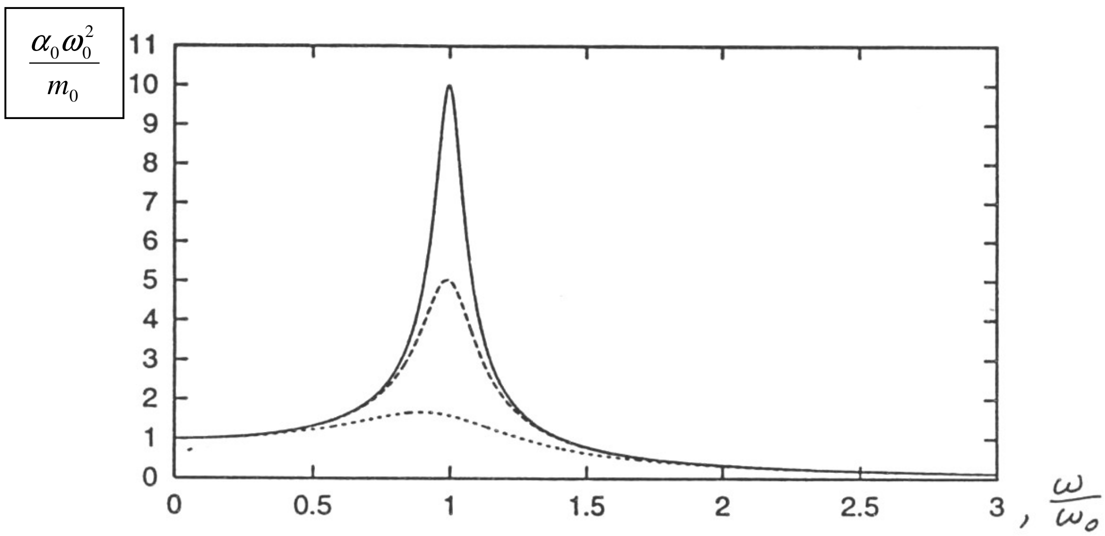

Figure 2 : *Amplitude des oscillations* $\alpha_0\omega_0^2 / m_0$ en fonction de ω / ω_0 pour les différentes valeurs du coefficient d'amortissement.

La fonction (15) est présentée à la fig.2. On voit que l'amplitude des oscillations du pendule passe par un maximum qui est d'autant plus aigu que δ est plus petit. Ce maximum à la fréquence propre correspond à la *résonance* du pendule sous l'action de la force sinusoïdale appliquée.

III/ Partie expérimentale

1) Matériel utilisé
    - un pendule de Pohl
    - un chronomètre
    - un multimètre
    - une alimentation électrique continue stabilisée
    - un dispositif d'acquisition de données et un capteur de mouvement.

2) Etude des oscillations libres

Pour cette étude vous n'avez besoin que du pendule de Pohl et d'un chronomètre.

- Vérifier qu'à sa position d'équilibre la flèche attachée au pendule montre le zéro du cadran.
- Déviez le pendule jusqu'à la valeur maximale indiquée sur le cadran et lâchez-le.

Le temps de retour du pendule est égal à la période T des oscillations. Pour diminuer l'erreur de mesure de T, mesurez le temps de 10 oscillations du pendule, qui est égale à $10T$. Répétez la mesure cinq fois. Evaluez la valeur de T (Remarque : T varie quand le nombre des oscillations >30).

- A partir de la valeur de T trouvez la fréquence propre du pendule et évaluez l'incertitude de mesure.

3) Etude des oscillations libres amorties

- Branchez la source de tension à l'électro-aimant.
- Faites des mesures des amplitudes des oscillations en fonction du temps pour 4 valeurs du courant alimentant les freins de Foucault : I = 0.25A, 0.40A, 0.60A, 0.9A. Pour des mesures plus précises et un traitement facilité des résultats, on utilisera le dispositif d'acquisition informatisé, dont le fonctionnement vous sera expliqué au cours de la séance.
- Calculez à l'aide de la formule (9) les décréments logarithmiques (10) et les coefficients d'amortissement pour chaque valeur du courant. *Attention* : la formule (9) peut être utilisée pour les mesures d'amplitudes séparées par quelques périodes : si $\alpha(t)$ est l'amplitude au temps t, et $\alpha(t+mT)$, celle au temps $t+mT$, alors $\alpha(t)$ et $\alpha(t+mT)$ sont séparées par un intervalle de temps égal à mT, on obtient en appliquant la formule (9) :

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha(t+mT)} = e^{\delta mT} \qquad (16)$$

- Représentez les *amplitudes* des oscillations en fonction du temps pour les valeurs du courant appliqué. Comparez les courbes avec la solution donnée par (7). A quoi correspondent ces courbes ?

4) Etude des oscillations forcées

- Branchez la source de tension au moteur. La tension d'alimentation est égale à 24V, les boutons du moteur sont en position « 0 ».

- Connectez le multimètre aux bornes du moteur.

- Réglez la valeur du courant qui alimente les freins de Foucault à I=0.60A.

Utilisez les boutons de réglage pour faire varier la fréquence de rotation du disque du moteur. Le multimètre indique la tension appliquée à l'électromoteur qui fait tourner le disque.

- En faisant varier la fréquence de rotation du disque du moteur, représentez l'amplitude α_0 des oscillations forcées du pendule en fonction de la pulsation ω de la force extérieure. Relevez en même temps la tension aux bornes de l'électromoteur mesurée avec le multimètre. A quelle tension U_0 la pulsation des oscillations atteint-elle ω_0 ?

Attention : les mesures ne doivent être effectuées qu'une fois l'amplitude des oscillations stabilisée.

- Effectuez la même expérience en prenant comme valeur du courant aux bornes des freins de Foucault : I = 0.40A, 0.25A, 0.A.

En approchant la résonance (la tension aux bornes de l'électromoteur tend vers U_0), utilisez le bouton de réglage « fein » (=fin).

- Représentez graphiquement l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement.

Comparez les résultats avec la théorie exposée ci-dessus.

- Quand la pulsation est proche de la pulsation propre du pendule, quel est le déphasage entre les oscillations de la force extérieure et les oscillations du pendule (suivez la flèche au bout de la spirale et la flèche sur la roue oscillante) ?