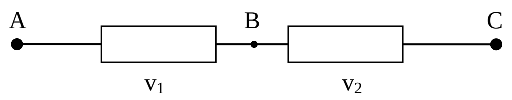
Annexe: Notation complexe en régime sinusoïdal

Introduction

Un circuit est le siège d'un régime sinusoïdal lorsque les intensités et les tensions qui y existent sont de la forme $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$, où ω est la pulsation liée à la fréquence N par $\omega = 2\pi N$, φ est le déphasage de u par rapport à une référence donnée et U l'amplitude de la grandeur u(t). Par convention, on désignera par la lettre minuscule u la fonction du temps u(t), et par la majuscule U l'amplitude constante de cette fonction.
En régime permanent continu, on est amené à additionner deux courants ou deux tensions (loi des nœuds, loi des mailles), ou à faire leur rapport (loi d'Ohm). Le but de cette annexe est de montrer comment ces deux opérations peuvent être réalisées en régime sinusoïdal.
Remarquons que la notation complexe qui va être introduite ici est très générale, elle est liée uniquement à l'existence des fonctions sinusoïdales; vous pouvez donc la rencontrer aussi en mécanique (mouvement vibratoire) et en optique (interférences, diffraction, holographie).

Addition de deux grandeurs sinusoïdales



Soient deux éléments de circuit placés en série, aux bornes desquels existent respectivement les tensions :

$$v_1 = V_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$v_2 = V_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

La tension existant entre A et C étant nécessairement sinusoïdale à la même fréquence (système linéaire), on la note $v = V\cos(\omega t + \varphi) = v_1 + v_2$, et le problème est de calculer V et φ en fonction de V_1,V_2, φ_1 et φ_2. Il existe pour cela trois méthodes : la méthode algébrique, de Fresnel ou la représentation complexe.

1) Addition directe par méthode algébrique.

En décomposant les trois cosinus avec des relations classiques, on obtient :

$$[V_1\cos(\varphi_1) + V_2\cos(\varphi_2)]\cos(\omega t) - [V_1\sin(\varphi_1) + V_2\sin(\varphi_2)]\sin(\omega t)$$
$$= V\cos(\varphi)\cos(\omega t) - V\sin(\varphi)\sin(\omega t)$$

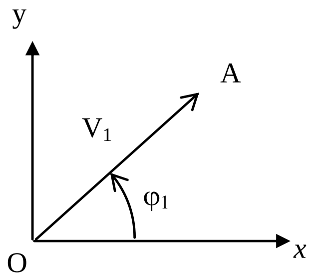
L'égalité devant être vérifiée à chaque instant, on doit donc avoir

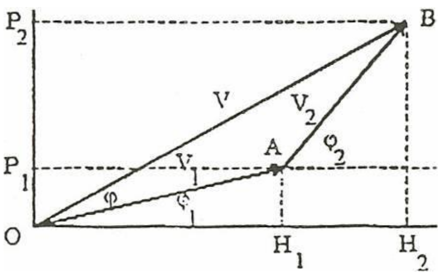
$$V\cos(\varphi) = V_1\cos(\varphi_1) + V_2\cos(\varphi_2)$$
$$V\sin(\varphi) = V_1\sin(\varphi_1) + V_2\sin(\varphi_2)$$

Ces deux relations permettent de calculer V et φ. Inutile d'en dire davantage : vous voyez que cette méthode, déjà peu pratique lorsqu'on additionne deux tensions ou deux courants, devient inutilisable lorsqu'il y en a plus.

2) Méthode graphique : représentation de Fresnel.

Elle consiste à remplacer une fonction sinusoïdale par un vecteur, comme ci-contre pour v_1 par exemple : $v_1 = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ se représente par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ dont la longueur (norme) est V_1 et qui fait avec l'axe O*x* l'angle φ_1.





La figure ci-contre montre l'addition des tensions v_1 et v_2 traitée comme une somme de vecteurs : v_1 est représentée par $\overrightarrow{OA}$ et v_2 par $\overrightarrow{AB}$. Si on appelle V la longueur de $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, et φ l'angle que fait $\overrightarrow{OB}$ avec l'axe O*x*, on voit facilement que les projections OH_2 et OP_2 de $\overrightarrow{OB}$ sur O*x* et O*y* s'écrivent:

$$OH_2 = V\cos\varphi = OH_1 + H_1H_2 = V_1\cos\varphi_1 + V_2\cos\varphi_2\,,$$
$$OP_2 = V\sin\varphi = OP_1 + P_1P_2 = V_1\sin\varphi_1 + V_2\sin\varphi_2\,.$$

Les relations qui lient V et φ à V_1,V_2, φ_1 et φ_2 sont les mêmes que celles établies dans la méthode directe : le vecteur $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ est donc bien l'image géométrique de la tension $v = v_1 + v_2$.

3) Méthode des nombres complexes.

Rappelons les différentes expressions d'un nombre complexe:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta) = \rho\exp(j\theta)$$

a et b sont les parties réelle et imaginaire, ρ le module et θ l'argument de z. Le complexe conjugué de z est z* (ou $\bar{z}$), soit $z^* = a - jb = \rho(\cos\theta - j\sin\theta) = \rho\exp(-j\theta)$, avec les relations simples:

$$z + z^* = 2\rho\cos\theta \qquad\qquad z - z^* = 2j\rho\sin\theta$$

On peut donc écrire $\rho\cos\theta = \Re[\rho\exp(j\theta)]$, $\Re$ désignant la partie réelle du nombre complexe entre crochets. La méthode consiste à remplacer la fonction sinusoïdale par le nombre complexe correspondant, sans le restreindre à sa partie réelle. Ainsi les trois tensions v, v_1 et v_2 se représentent par $\underline{V_1}, \underline{V_2}$ et $\underline{V}$, où le symbole "__" rappelle qu'il s'agit de quantités complexes :

$$\underline{V_1} = V_1\exp(\omega t)\exp(j\varphi_1),\ \underline{V_2} = V_2\exp(\omega t)\exp(j\varphi_2)\ \text{ et }\ \underline{V} = V\exp(\omega t)\exp(j\varphi)$$

La somme $v_1(t) + v_2(t) = v(t)$ revient à résoudre l'équation complexe

$$\underline{V} = \underline{V_1} + \underline{V_2} \quad \text{soit } V_1\exp(j\varphi_1) + V_2\exp(j\varphi_2) = V\exp(j\varphi)$$

En passant par le complexe conjugué $V_1 \exp(-j\varphi_1) + V_2 \exp(-j\varphi_2) = V \exp(-j\varphi)$ et en faisant membre à membre la demi-somme puis la demi-différence, on retrouve facilement les deux expressions déjà obtenues pour calculer V et φ :

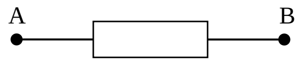
$$V\cos(\varphi) = V_1 \cos(\varphi_1) + V_2 \cos(\varphi_2)$$

$$V\sin(\varphi) = V_1 \sin(\varphi_1) + V_2 \sin(\varphi_2)$$

La somme des deux tensions v_1 et v_2 se traite donc bien en faisant la somme des images complexes $\underline{V}_1$ et $\underline{V}_2$ correspondantes.

L'avantage de la notation complexe sur les deux autres méthodes apparaît lorsqu'on doit faire le quotient d'une tension par un courant en régime sinusoïdal.

Notion d'impédance complexe



Soit un élément de circuit prélevé entre deux points A et B. En régime permanent continu, si une différence de potentiel $V=V_A-V_B$ existe entre A et B, un courant d'intensité I circule de A vers B et le quotient V/I traduit la résistance R du circuit. Cette résistance est évidemment constante.

Supposons que cet élément soit alimenté en régime permanent sinusoïdal : la différence de potentiel entre A et B s'écrit alors $v = V\cos(\omega t + \varphi_1)$ et le courant circulant dans l'élément est $i = I\cos(\omega t + \varphi_2)$, où, dans le cas général, φ_2 est différent de φ_1. Le quotient des valeurs instantanées est alors

$$\frac{v}{i} = \frac{V\cos(\omega t + \varphi_1)}{I\cos(\omega t + \varphi_2)}$$

Or, les deux cosinus varient entre -1 et 1 en passant par zéro à des instants différents en raison de la différence entre φ_2 et φ_1. Le rapport v/i prend donc toutes les valeurs entre $+\infty$ et $-\infty$! Avec les fonctions du temps v et i, il est impossible de retrouver la notion de résistance du circuit.

Le passage à la notation complexe permet de résoudre cette difficulté. En effet, le rapport v/i s'écrit alors :

$$\frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V\exp(j\varphi_1)}{I\exp(j\varphi_2)} = \frac{V}{I}\exp[j(\varphi_1 - \varphi_2)] = \underline{Z}$$

Le nombre complexe $\underline{Z}$, indépendant du temps, s'appelle l'impédance de l'élément de circuit étudié (souvent, on ne garde pas le symbole "__" dans les expressions). Elle se mesure en Ohm.

Avec cette notation, on peut écrire $V = Z.I$ (en fait $\underline{V} = \underline{Z}.\underline{I}$), relation qui traduit la loi d'Ohm en régime sinusoïdal. Ainsi, toutes les méthodes de résolution de circuits vues en courant continu (diviseur de tension, loi de Kirchhoff, …) sont encore applicables en régime sinusoïdal, à condition de travailler avec les impédances complexes. Seule la notation complexe permet cette transposition, ce qui justifie son importance.

Les impédances complexes se traitent comme des résistances : en série elles s'ajoutent, en parallèle ce sont leurs inverses qui s'ajoutent.

Lorsque vous connaissez l'impédance complexe qui existe entre deux points d'un circuit, vous êtes en possession de deux informations capitales :

- Le module de Z donne le rapport V/I des amplitudes de la tension v (t) appliquée au circuit au courant i (t) qui le traverse;

- L'argument de Z donne la différence de phase $\varphi_1-\varphi_2$, c'est-à-dire le déphasage de la tension v(t) sur le courant i(t).

Quelques impédances élémentaires

Résistance:

C'est le seul cas pour lequel la loi d'ohm est vérifiée en valeur instantanée. On peut écrire en effet v(t)= R.i(t), soit V = RI : l'impédance est donc égale à R, elle est réelle. La résistance n'introduit pas de déphasage entre tension et courant.

Capacité :

L'intensité i qui traverse une capacité C, la tension v à ses bornes et la charge Q qu'elle porte sont liées par les relations :

Q = C.v et i = dQ/dt, soit i = C dv/dt.

En considérant $\underline{V} = V\exp(j\omega t)$, on aura $\underline{I} = Cj\omega\exp(j\omega t)$ et donc $\frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} = Z_C$. L'impédance complexe d'une capacité est donc fonction de la fréquence. Elle introduit un déphasage de $-\pi/2$ entre la tension et le courant (partie imaginaire négative, partie réelle nulle). En courant continu ($\omega = 0$), Z_C tend vers l'infini, le condensateur se comporte comme un coupe-circuit.

Self (bobine):

Dans le cas d'une bobine d'inductance L, la relation liant le courant i traversant la bobine à la différence de potentiel v à ses bornes est v = L di/dt. On trouve alors une impédance complexe $Z_L = jL\omega$. Cette impédance imaginaire pure introduit un déphasage de $+\pi/2$ entre le courant et la tension. En courant continu, il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la bobine, celle-ci se comporte comme un court-circuit (impédance nulle).