# Etude dynamique de systèmes quantiques

memoire présenté pour l'obtention
du titre d'habilité à diriger des recherches

*Dmitrií Sadovskií*

*Université du Littoral, Dunkerque*
sadovski@pca3.univ-littoral.fr

# Commission d'Examen

| | |
|---|---|
| *Pierre Glorieux* | Physique, Université Lille I |
| *Mark S. Child* | Chemistry, University of Oxford |
| *Christian Jungen* | Université Paris-Sud, Orsay |
| *James Montaldi* | INLN, Université de Nice |
| *Louis Michel* | IHES, Bures |
| *Jean Bellissard* | Université Paul Sabatier, Toulouse |
| *Eugene Bogomolny* | Institut de Physique Nucléaire, Orsay |
| *Richard H. Cushman* | Mathematics, University of Utrecht |
| *Daniel Boucher* | Université du Littoral, Dunkerque |
| *Boris Zhilinskií* | Université du Littoral, Dunkerque |

## Notre idée centrale

Nous essayons d'utiliser la théorie dynamique des systèmes classiques pour analyser les divers aspects qualitatifs des systèmes quantiques correspondants, tels que

- la densité et la classification des états: polyades, multiplets, branches, couches, amas d'états, etc,
- les modes de localisation des états,
- les nombres quantiques approximatifs,
- les changements qualitatifs de la structure du spectre d'énergie en fonction de paramètres dynamiques et externes,
- les manifestations expérimentales.

Par conséquent, nous devrons nous préparer à de nombreux passages entre les terminologies classiques et quantiques.

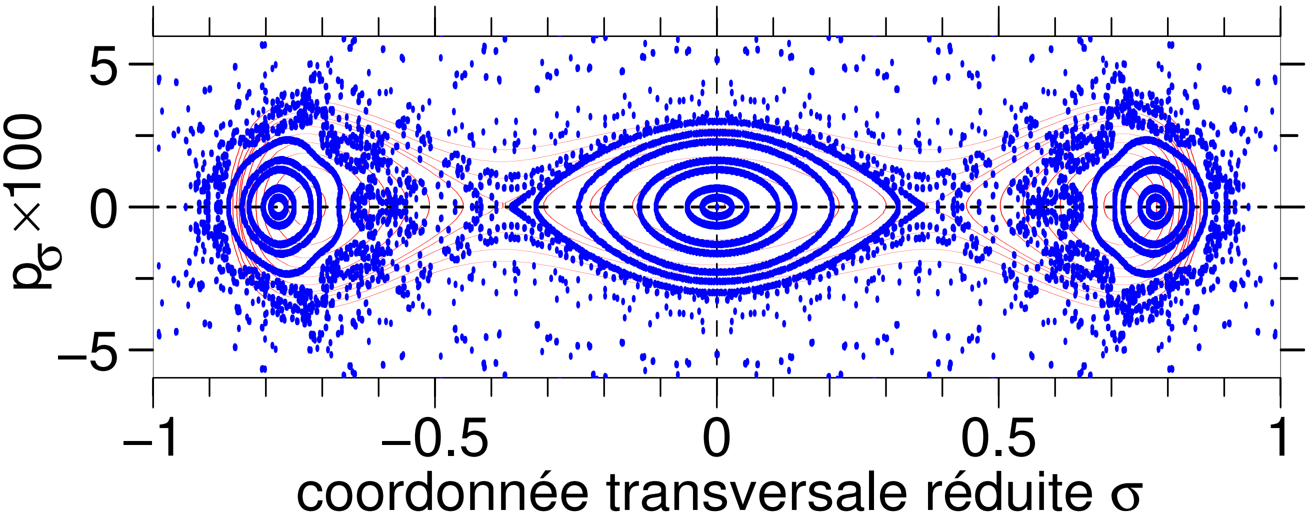
## Systèmes quantiques et classiques dans notre étude

Les atomes et molécules (A&M) offrent une opportunité unique d'étudier un système dynamique qui

- est un système essentiellement quantique,
- est, en principe, complètement décrit par un Hamiltonien totalement connu et l'équation de Schrödinger correspondante,
- possède un analogue classique naturel, un système Hamiltonien classique,
- est un système à plusieurs corps où un nombre d'approximations physiques, telles que la séparation des variables dynamiques, et divers méthodes de la théorie des perturbation s'appliquent, et en conséquence,
- permet pour des niveaux consécutifs de compréhension de commencer à partir de modèles généraux simples et développer en des descriptions de plus en plus complexes et précises,
- le dernier mais non le moindre, peut souvent être étudié expérimentalement.

# Chaos vs ordre

Nos systèmes dynamiques sont de type “mixte”:
intégrabilité et chaos y coexistent




électron de l’atome d’hydrogène soumis au champ magnétique, dynamique au voisinage de l’orbite périodique orthogonale au champ

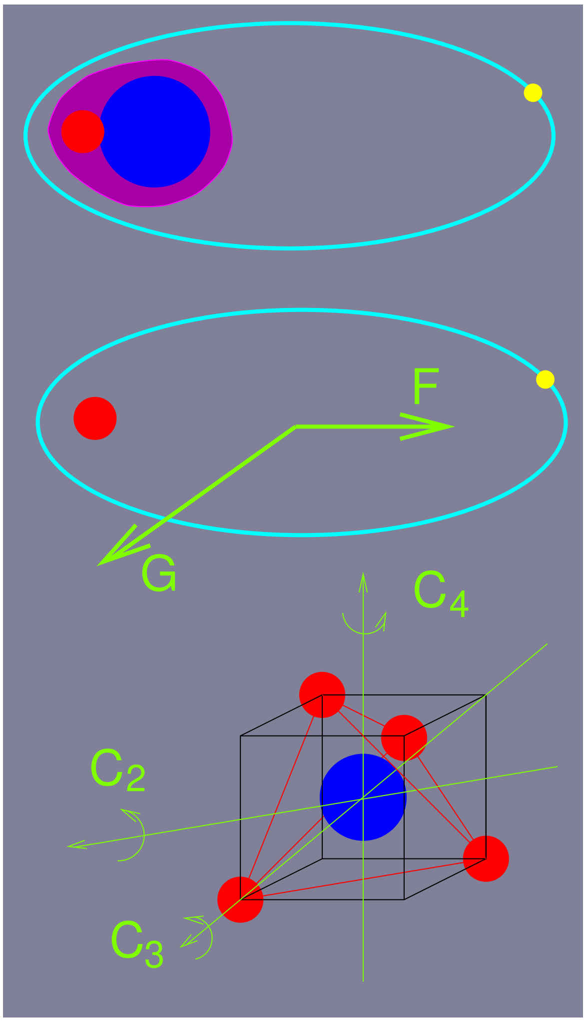
J. Delos et D. Sadovskií, Phys. Rev. E **54**(2), 2033–70 (1996)

## Aspects principaux de notre travail:

- Formes normales et problèmes réduits
- Hamiltoniens effectifs
- Théorie qualitative
- Systèmes avec symétrie
- Étude des orbites périodiques
- Modes normaux nonlinéaires
- Correspondance quantique-classique
- Applications dans les problèmes concrets

## Problèmes concrets et modèles abstraits:

- atome d'hydrogène soumis aux champs extérieurs magnétique et électrique: effet quadratique de Zeeman, champs parallèles et orthogonaux
- molécules diatomiques de type Rydberg (excimeres), structure rotationnelle des états électroniques excités, analyse de KrD et ArD
- rotation-vibration de molécules de type toupie sphérique, example de $CH_4$, spectroscopie de $SnH_4$
- modèle à deux degrés de liberte de type Hénon-Heiles, avec l'espace réduit $CP_1 \sim S_2$
- modèle à trois modes avec l'espace réduit $CP_2$
- vibrations excitées de molécules polyatomiques, exemple de $H_3^+$

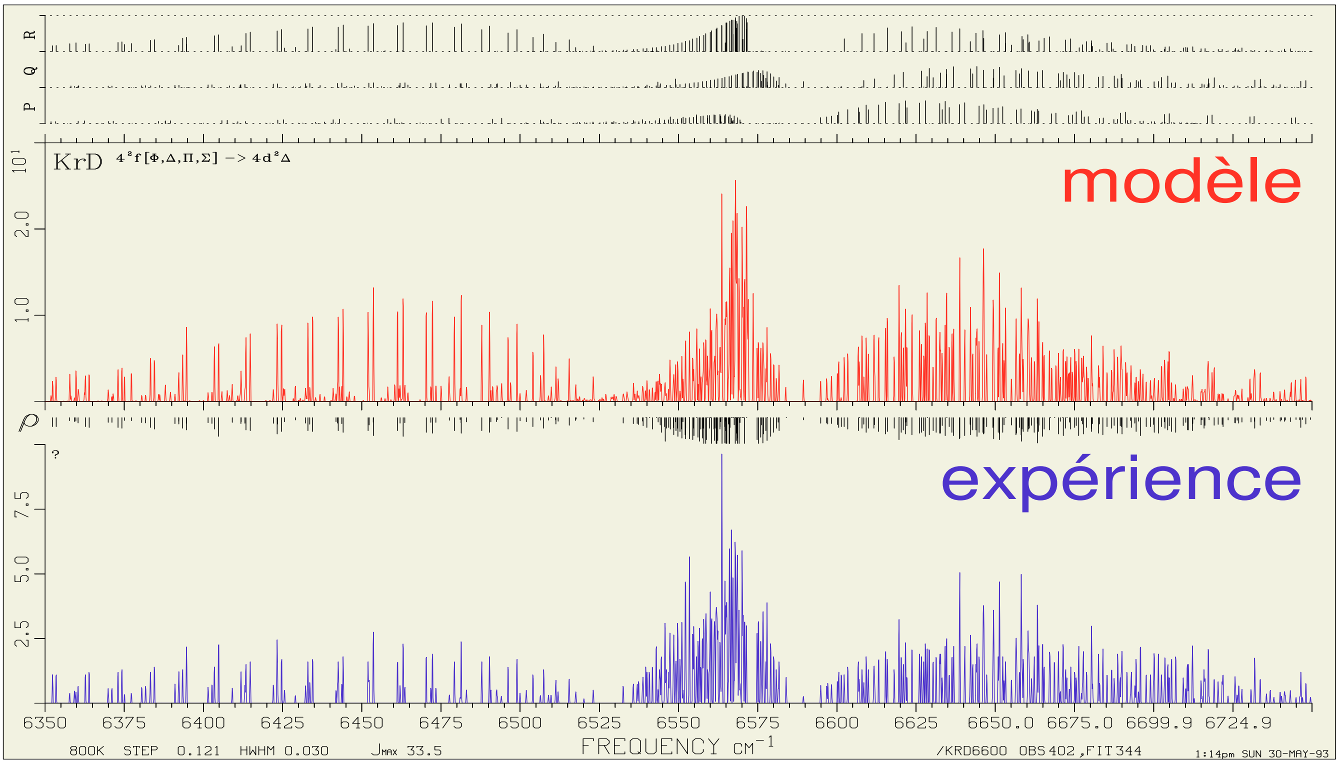



Molécules de type Rydberg:
hydrides des gaz rares ArD et KrD largement polarisés

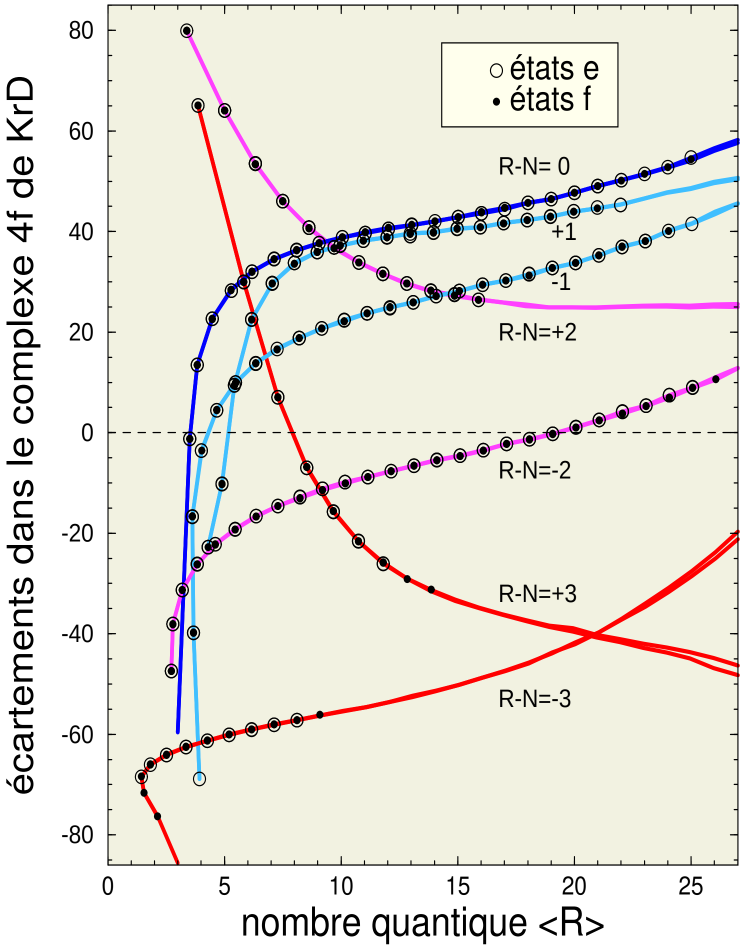
Atome d'hydrogène
soumis aux champ magnétique $G$ et électrique $F$ extérieurs

Vibration-rotation
des molécules polyatomiques, exemples des molécules de type toupie sphérique

## Analyse des données expérimentales:




spectre de transition $4\,^2f \to 4d\,^2\Delta$ de KrD, I. Dabrowski et D. Sadovskií, J. Chem. Phys. **107**(21), 8874–85 (1997)




## Approche phénomènologique:

Nous obtenons les énergies des niveaux quantiques et leurs attribution selon les nombres quantiques approximatifs, telles que $R$, $N$, $L_z$

Ces derniers impliquent l'existence des intégrales de mouvement approximatives

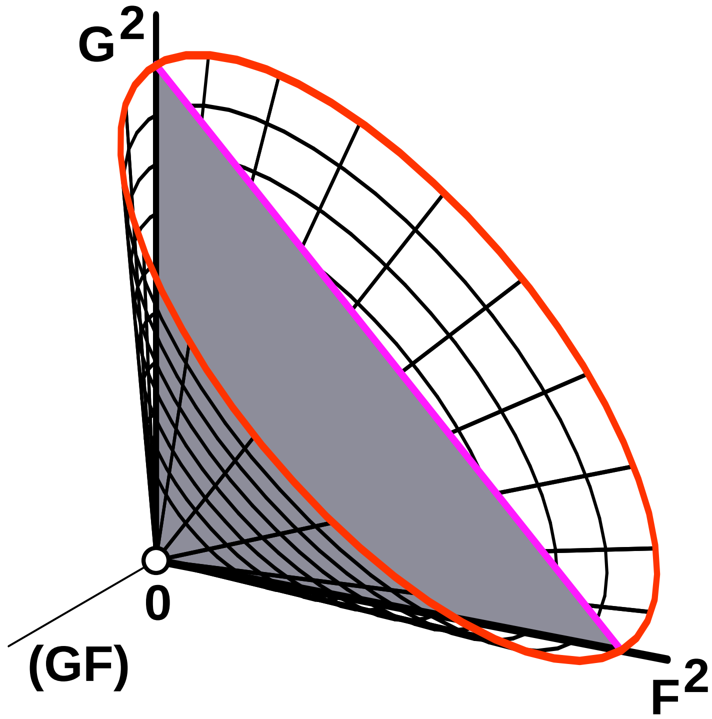
Par conséquant, la structure des niveaux peut être décrite par notre modèle, tel que l'Hamiltonien effectif électronique-rotationnel

$$H_{\text{eff}} = \Delta L_z^2 + B\mathbf{R}^2 + 2B\zeta\mathbf{LJ} + \cdots$$

## Systèmes perturbés de Kepler/Coulomb:

- Classification de différents problèmes avec l'atome d'hydrogène soumis aux champs extérieurs
- Champs parallèles et orthogonaux (croisés)
- Structure dynamique sur l'espace de phase initial et réduit
- Approximation de couches $n$ dans le problème de Coulomb perturbé
- Analyse en présence de symétrie, action de groupe, base de polynômes invariants (*integrity basis*), espace des orbites (*orbifold*)
- Evolution et bifurcations des équilibres relatifs:
  - écroulement (collapse) de la couche $n$ dans les champs parallèles
  - evolution des modes normaux nonlinéaires dans les champs croisés
  - Deuxième réduction, monodromie dans les champs croisés
- Relation avec la mécanique quantique: quantification EBK et localisation des états quantiques

# Classification de différents problèmes de l'atome d'hydrogène perturbé (*B. Zhilinskií*)




**F** champ électrique

**G** champ magnétique

(**GF**) =0 orthogonaux
(**GF**) =$GF$ parallèles

paramètre formel
de grandeur:

$$S = \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 \sqrt{G^2 + \left(3F\frac{2}{\omega}\right)^2}$$

## Choix des paramètres:

paramètres des champs à echelle adaptée:

$$g = 4G/\omega^2, \quad f = 24F/\omega^3, \quad \omega = \sqrt{-8E} \approx 2/n$$

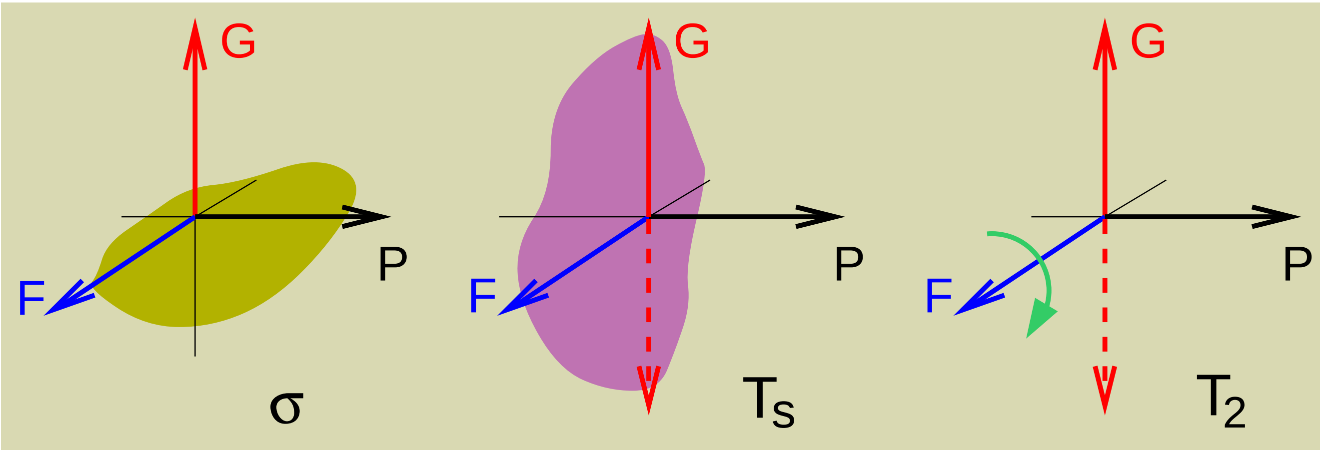
paramètres uniformes des champs:

$$F = \frac{1}{3} F_s S \left(\frac{\omega}{2}\right)^4, \quad G = G_s S \left(\frac{\omega}{2}\right)^3$$

petits paramètres formels:

$$S = \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 \sqrt{G^2 + \left(3F\frac{2}{\omega}\right)^2} \approx \tau = n\frac{\omega}{2} S$$

## Opérations de symétrie du groupe $G_4 = \{I, \sigma, \mathcal{T}_s, \mathcal{T}_2\}$ de problème des champs croisés



# Symétrie des problèmes de l'atome d'hydrogène soumis aux champs électrique **F** et magnétique **G**

| | | | |
|---|---|---|---|
| sans champs | $O(3) \wedge \mathcal{T}$ | $G^2 = F^2 = 0$ | point $O$ |
| effet de Stark | $C_{\infty v} \wedge \mathcal{T}$ | $G^2 = 0,\ F^2 > 0$ | rayon $OF^2$ |
| effet de Zeeman | $C_{\infty h} \wedge \mathcal{T}_s$ | $G^2 > 0,\ F^2 = 0$ | rayon $OG^2$ |
| champs parallèles | $C_\infty \wedge \mathcal{T}_s$ | $G^2 > 0,\ F^2 > 0,$ $(\mathbf{GF})^2 = G^2F^2$ | surface conique |
| champs orthogonaux | $G_4 = \{I, \sigma, \mathcal{T}_s, \mathcal{T}_2\}$ | $G^2 > 0,\ F^2 > 0,$ $(\mathbf{GF}) = 0$ | plan $G^2OF^2$ |
| configuration générique | $\mathcal{T}_s$ | $G^2 > 0,\ F^2 > 0,$ $0 \neq (\mathbf{GF})^2 < G^2F^2$ | l'intérieur du cône |

## Glossaire dynamique:

| problème initial | problème réduit |
|---|---|
| Hamiltonien initial $H$ | forme normale $H_{\text{f.n.}}$ |
| espace des phases initial $R_{2N}$ | espace des phases réduit $\Sigma$ |
| orbite périodique | points stationnaires de $H_{\text{f.n.}}$ |
| modes normaux nonlineaires | équilibres relatifs de $H_{\text{f.n.}}$ |

$n$ intégrale principale de Coulomb/Kepler, nombre quantique principal

$L$ moment angulaire, moment orbital de l'électron

$K$ vecteur de Laplace-Runge-Lenz

# Fonction d'Hamilton dans l'espace physique à 3D

champs parallèles:

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 - \frac{1}{r} + Fq_b + \frac{1}{2}GL_b + \frac{1}{8}G^2(q_e^2 + q_p^2)$$

champs orthogonaux:

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 - \frac{1}{r} + Fq_e + \frac{1}{2}GL_b + \frac{1}{8}G^2(q_e^2 + q_p^2)$$

# Transformation de Kustaanheimo-Stiefel:

$$M_{\mathsf{KS}} = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & -q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & -q_1 \end{pmatrix}$$

coordonnées dans l'espace initial à 3D:

$$(q_b, q_e, q_p, 0)^T = M_{\mathsf{KS}}(q_1, q_2, q_3, q_4)^T$$

$$r = q_b^2 + q_e^2 + q_p^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

quantités de mouvement (moments) dans l'espace à 3D:

$$(p_b, p_e, p_p, \Pi)^T = \frac{1}{2r} M_{\mathsf{KS}}(p_1, p_2, p_3, p_4)^T$$

Contraint (intégrale de mouvement) imposé:

$$\boxed{\zeta \stackrel{\text{def}}{=} -2r\Pi = q_1 p_4 - q_4 p_1 + q_3 p_2 - q_2 p_3 = 0}$$

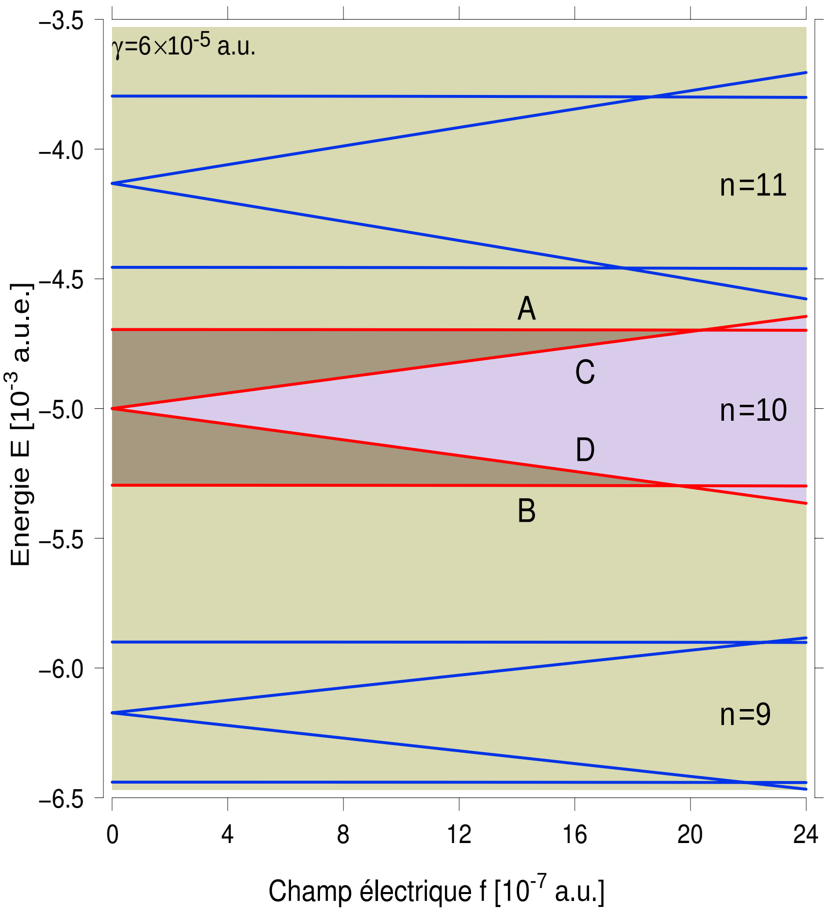
## Fonction d'Hamilton régularisée dans l'espace KS

champs magnétique et électrique orthogonaux

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p^2+q^2) \\ &\quad + \frac{1}{3}f(q_2q_1 - q_4q_3)q^2 + \frac{1}{2}g(q_2p_3 - q_3p_2)q^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}g^2(q_2^2+q_3^2)(q_1^2+q_4^2)q^2 \\ &= \frac{4}{\omega}\ , \end{aligned}$$

paramètres des champs à échelle adaptée:

$$g = 4G/\omega^2, \quad f = 24F/\omega^3, \quad \omega = \sqrt{-8E}$$




## Réduction de Kepler/Coulomb et l'approximation de couche $n$

$$
\begin{aligned}
n^2 &= L^2 + K^2 \\
&\approx \text{constante} \\
&\approx (2/\omega)^2
\end{aligned}
$$

couches $n$ voisins (multiplets quantiques) dans le problème des champs parallèles

## Quelle peut être la grandeur du petit paramètre?

ionisation de Stark dans les champs croisés
le long de $q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = q_4 = \sqrt{\rho/2}$

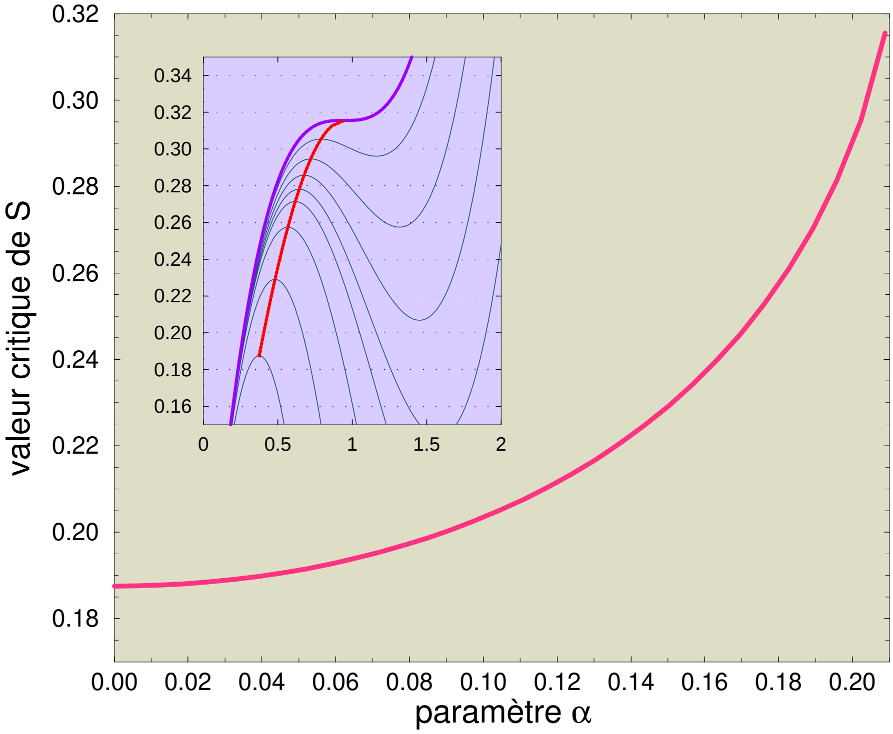
$$H(\rho) = \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{6}\rho^2 f + \frac{1}{32}\rho^3 g^2 = \frac{4}{\omega}$$

$$H(\rho)S\frac{\omega}{4} = G_s^2 t^3 - \frac{4}{3}F_s t^2 + t = S, \quad t = \frac{\rho}{4}S\frac{\omega}{2}$$

valeur critique de paramètre formel $S_{\text{selle}}$

$$\begin{aligned} S \;&=\; -\frac{(4F_s - \sqrt{43F_s^2 - 27})}{729(F_s-1)^2(F_s+1)^2} \\ &\quad \times (70F_s^2 - 4F_s\sqrt{43F_s^2 - 27} - 54) \\ &\approx\; \tfrac{3}{16} - \tfrac{75}{256}(F_s - 1) + \tfrac{9579}{16384}(F_s - 1)^2 \ldots \end{aligned}$$

# Valeur critique de l'amplitude uniforme $S$ des champs orthogonaux électrique et magnétique




$$F_s = \cos\alpha\pi$$
$$G_s = \sin\alpha\pi$$

$$S_{\text{crit}} \approx \frac{3}{16} + \cdots$$

# Espace des phases réduit

Intégrale de mouvement principale (intégrale de Kepler)

$$2n = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \approx \text{const},$$

avec l'intégrale de contraint dans l'espace KS

$$\zeta = q_1 p_4 - q_4 p_1 + q_3 p_2 - q_2 p_3 = 0$$

mènent à l'espace des phases réduit $\Sigma$ à 4D de topologie $S_2 \otimes S_2$,

$$R_8 \quad \xrightarrow{\substack{n = \text{const} \\ \zeta = 0}} \quad \Sigma_4 = S_2 \otimes S_2$$

Cette espace peut être représenté par deux vecteurs:
le moment angulaire **L** et le vecteur de Laplace-Runge-Lentz **K**

tels que $n^2 = \mathbf{K}^2 + \mathbf{L}^2, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{L} = 0$

# Moment angulaire et vecteur de Laplace-Runge-Lentz

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{q}}{r}$$

Composantes de **L** et **K** en terme des coordonnées KS:

$$\begin{aligned}
L_b &= q_2 p_3 - q_3 p_2 \\
L_e &= \frac{1}{2}(q_2 p_4 + q_3 p_1 - q_1 p_3 - q_4 p_2) \\
L_p &= \frac{1}{2}(q_1 p_2 + q_3 p_4 - q_2 p_1 - q_4 p_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_b &= \frac{1}{4}(p_2^2 + q_2^2 + q_3^2 + p_3^2 - q_1^2 - p_1^2 - q_4^2 - p_4^2) \\
K_e &= \frac{1}{2}(p_4 p_3 - q_2 q_1 - p_1 p_2 + q_4 q_3) \\
K_p &= -\frac{1}{2}(q_3 q_1 + p_1 p_3 + q_4 q_2 + p_4 p_2)
\end{aligned}$$

## Problème des champs parallèles:

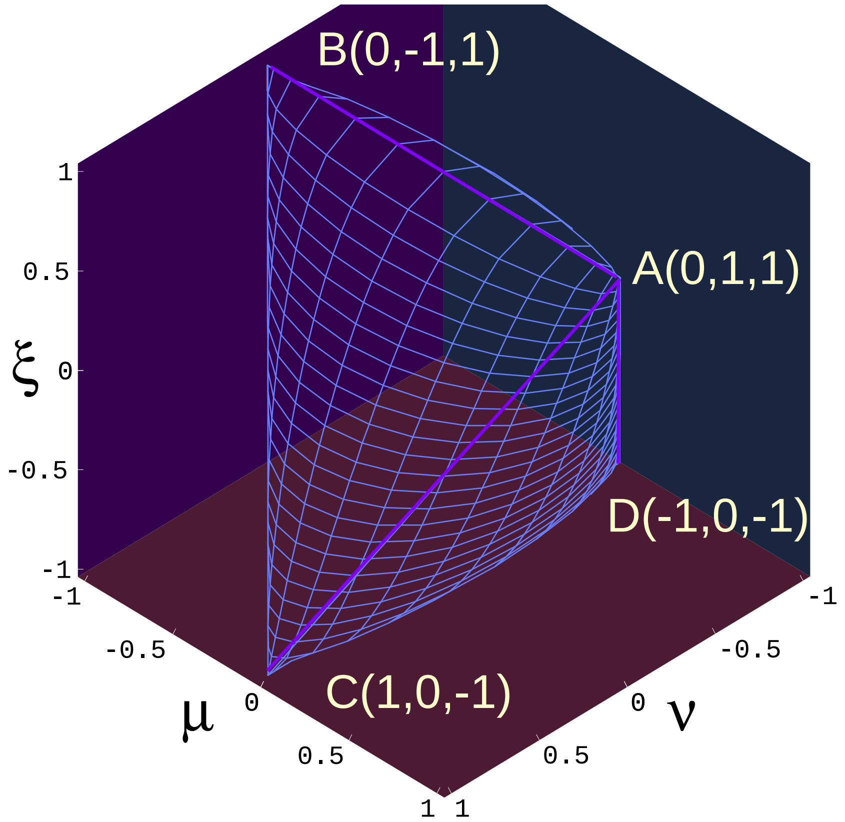
Ce problème possède l'intégrale de mouvement exacte $L_z$ grace à la symétrie $C_\infty$. Deuxième réduction à l'égard de $L_z$ mène à l'espace des phases réduit à 2D avec la topologie $S_2$

$$R_8 \xrightarrow{\substack{n=\text{const}\\ \zeta=0}} \Sigma_4 = S_2 \otimes S_2 \xrightarrow{L_z=\text{const}} \mathfrak{S} \sim S_2$$

$$\boxed{\text{Base d'intégrité:}\quad \mu = \frac{L_z}{n}, \quad \nu = \frac{K_z}{n}, \quad \xi = \frac{(L^2 - K^2)}{n^2}}$$

expression de type f.n. pour l'énergie normalisée sur $n$

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= G\mu + 3F\nu - \frac{1}{4}G^2\xi \\ &+ \frac{1}{8}(9F^2 + G^2)\mu^2 + \frac{1}{8}(3F^2 - 5G^2)\nu^2 \\ &+ \frac{1}{8}(3G^2 - 17F^2)\mu\nu\end{aligned}$$




## Espace des orbites

(orbifold $\mathfrak{O}$)
dans le problème
des champs parallèles

$$
\begin{aligned}
|\xi| &\leq 1, \\
|\mu| &\leq 1, \\
|\nu| &\leq 1
\end{aligned}
$$

$$\sigma = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{L} \wedge \mathbf{K})/n^2$$

$$4\sigma^2 = 1 - \xi^2 - 2(1-\xi)\mu^2 - 2(1+\xi)\nu^2 \geq 0$$

# Équilibres relatifs
# dans le problème des champs parallèles:

nombres de Betti pour $\Sigma_4 = S_2 \otimes S_2$:

$$b_0 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = 2$$

characteristique de Euler pour $\Sigma_4$ est égale à 4

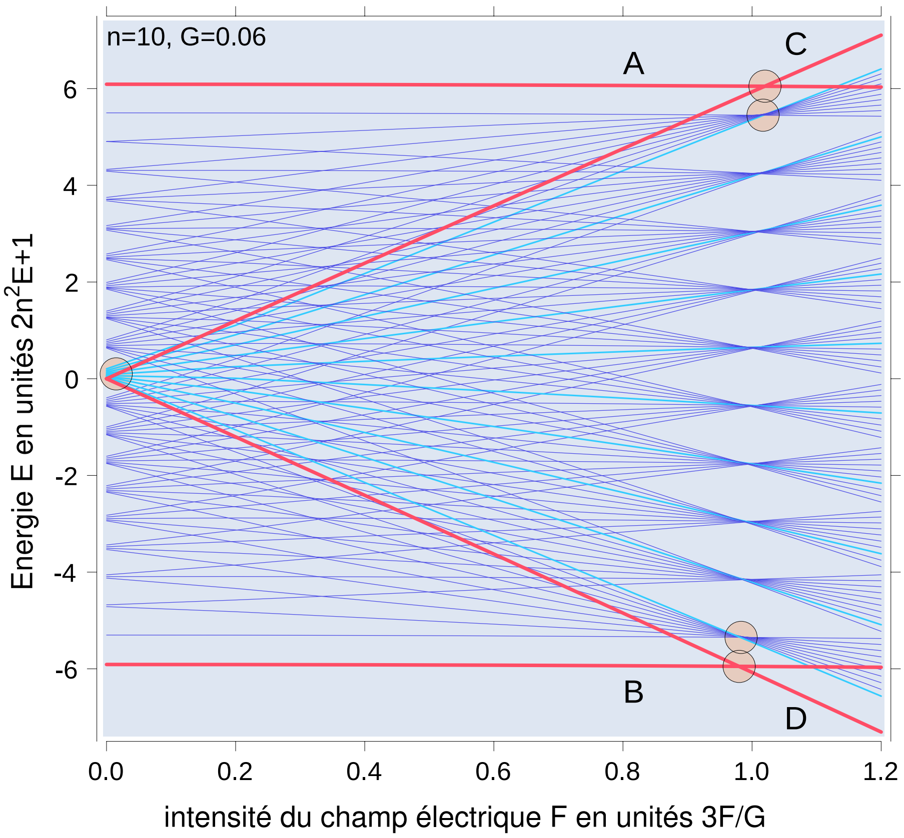
inégalités de Morse nous indiquent que
la fonction de Morse plus *simple* sur $\Sigma_4$ possède

1 maximum, 1 minimum, et 2 $(++--)$ point-selles

ces points stationnaires peuvent être placés sur quatre orbites critiques de l'action de $C_\infty \wedge \mathcal{T}_s$

| orbite | $\nu$ | $\mu$ | $\xi$ | mode normal nonlinéaire |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | $+1$ | $+1$ | cercle autour de l'axe des champs |
| $B$ | 0 | $-1$ | $+1$ | cercle autour de l'axe des champs |
| $C$ | $+1$ | 0 | $-1$ | ligne vers haut de l'axe des champs |
| $D$ | $-1$ | 0 | $-1$ | ligne vers bas de l'axe des champs |

# Écroulement (*collapse*) de la structure de couche $n$

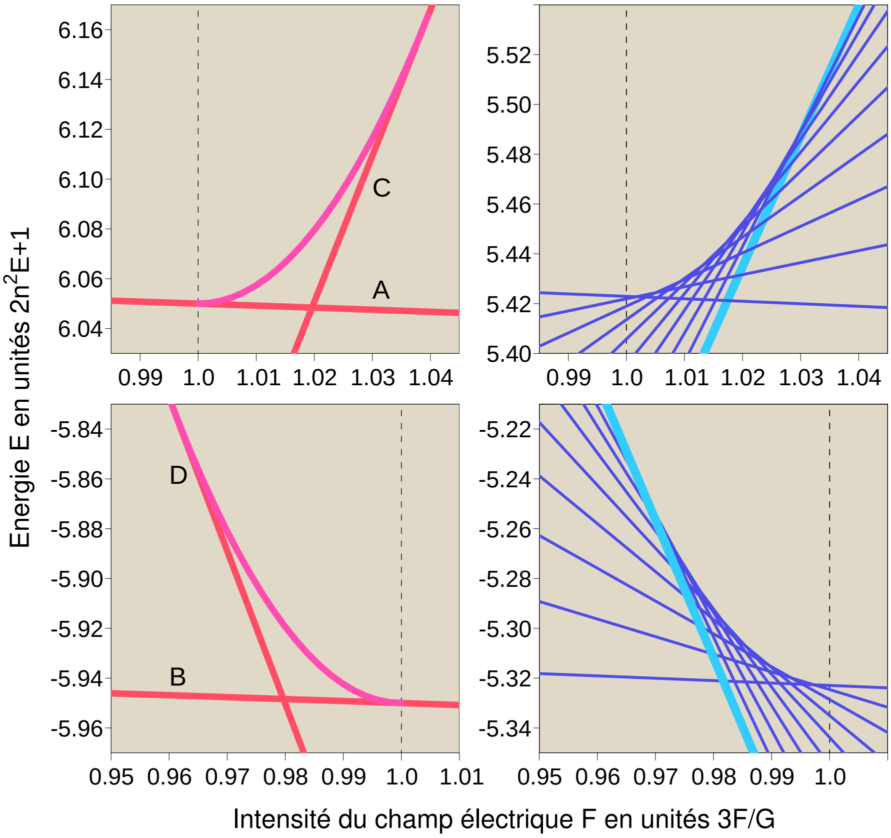



dans le problème des champs parallèles

| | $\nu$ | $\mu$ | $\xi$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | +1 | +1 |
| $B$ | 0 | −1 | +1 |
| $C$ | +1 | 0 | −1 |
| $D$ | −1 | 0 | −1 |

*D. Sadovskií*, *B. Zhilinskií* *et L. Michel*, Phys. Rev. A **53**, 4064–7 (1996)

# Bifurcations dans la région d'écroulement (*collapse*)




dans le problème des champs parallèles

$$\delta_C \approx \frac{2G}{3} + \frac{G^2}{72}$$

$$\delta_A \approx \frac{G^2}{8} - \frac{G^3}{16}$$

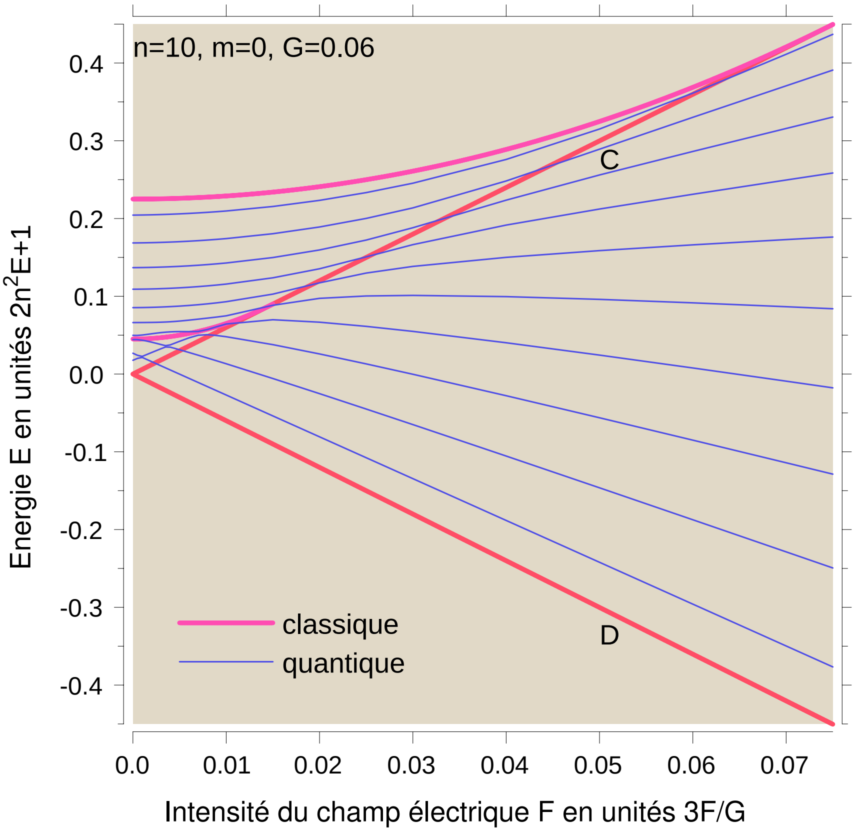
$$\delta_B \approx -\frac{G^2}{8} + \frac{G^3}{16}$$

$$\delta_D \approx -\frac{2G}{3} + \frac{G^2}{72}$$

classical vs quantum

Phys. Rev. A **53**(6), 4064–7 (1996)

# Équilibres relatifs proche à la limite de Zeeman




problème des champs parallèles doublement réduit avec $L_z = 0$

*D. Sadovskií, B. Zhilinskií et L. Michel*, Phys. Rev. A **53**(6), 4064–7 (1996)

# Atome d'hydrogène soumis aux champs orthogonaux électrique et magnétique

## Groupe de symétrie

$$G_4 = \{I, \sigma, T_s = T \circ \sigma', T_2 = T \circ C_2\}$$

## Fonction génératrice de Moline

$$g_{S_2 \otimes S_2 | G_4}(\lambda) = \frac{1 + 2\lambda^2 + \lambda^4}{(1-\lambda)^2(1-\lambda^2)^2}$$

## Polynômes de la base d'intégrité

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| principaux: | $K_e$, | $L_b$, | $K_b^2$, | $L_e^2$ |
| auxiliaires: | $K_b L_e$, | $K_p^2 - L_p^2$, | $K_b L_e (K_p^2 - L_p^2)$ | |

## Forme normale pour le problème des champs orthogonaux

$$H_{\text{f.n.}} = 2n\left(1 + \frac{\tau}{2}H_1 + \frac{\tau^2}{4}H_2 + \frac{\tau^3}{32}H_3 + \ldots\right) = \frac{4}{\omega} = \frac{4}{\sqrt{-8E}}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= G_s L_b - F_s K_e \\
H_2 &= -(3L_b^2 - 2K_e^2 + 3K_b^2 + 2L_e^2 + 2(L_p^2 - K_p^2) - 3)G_s^2/4 \\
&\quad +(7K_e L_b - L_e K_b)F_s G_s/3 \\
&\quad -(51K_e^2 - 9L_e^2 + 17)F_s^2/36 \\
H_3 &= L_b(6L_e^2 - 6K_e^2 + 9K_b^2 + 5L_b^2 + 6(L_p^2 - K_p^2) - 9)G_s^3 \\
&\quad -K_e(125 - 43L_e^2 + 125K_e^2)F_s^3/9 \\
&\quad +(-45K_e L_e^2 + 45K_e^3 - 65K_e K_b^2 + 117K_e \\
&\quad\ -147L_b^2 K_e - 45K_e(L_p^2 - K_p^2) + 48L_b(L_e K_b))F_s G_s^2/6 \\
&\quad -(3K_b^2 L_b + 87L_e^2 L_b - 615K_e^2 L_b - 3L_b^3 - 232L_b \\
&\quad\ -3L_b(L_p^2 - K_p^2) + 108K_e(L_e K_b))F_s^2 G_s/18
\end{aligned}$$

## Équilibres relatifs dans le problème des champs orthogonaux

position sur $S_2 \otimes S_2$ et action $n$ des orbites correspondants

symétrie $G_4$, $Lp = Kp = K_b = L_e = 0$

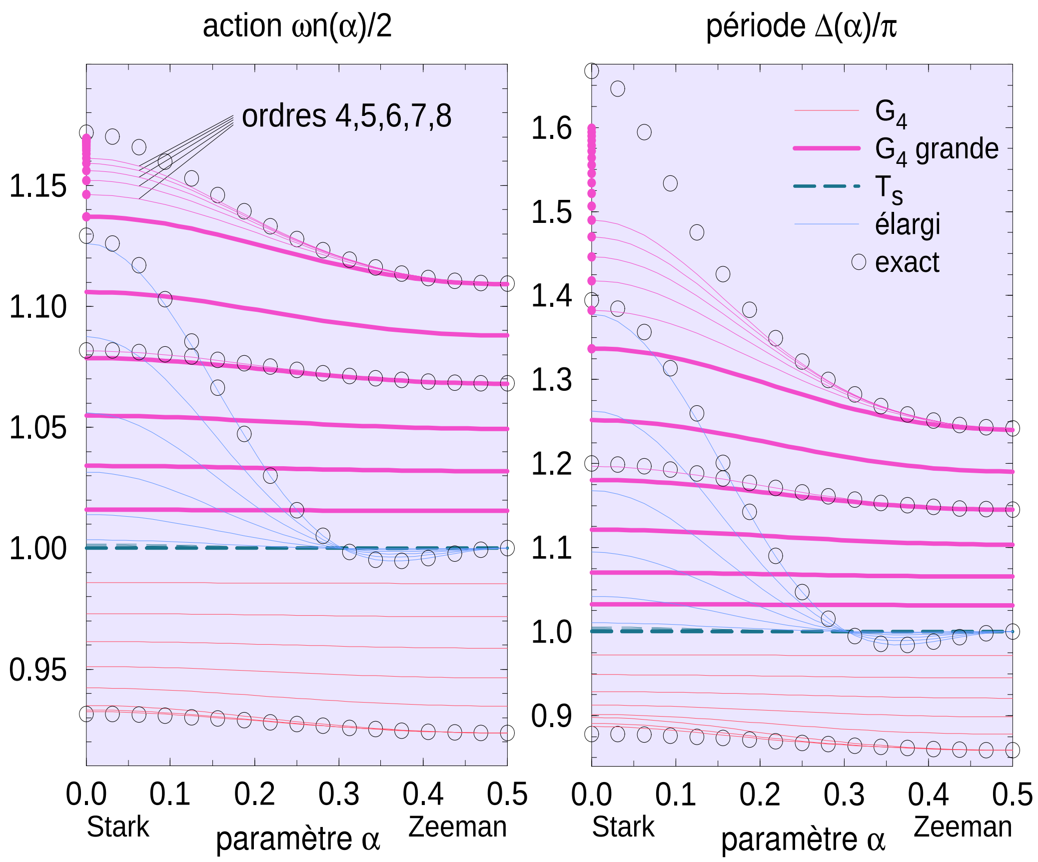
| | |
|---|---|
| $K_e$ | $\mp F_s - \tau F_s G_s^2(4G_s^2 - 3)/12$ |
| | $\mp \tau^2 F_s G_s^2(-103G_s^2 - 60G_s^4 + 40G_s^6 + 21)/144$ |
| $L_b$ | $\pm G_s - \tau G_s F_s^2(4G_s^2 - 3)/12$ |
| | $\mp \tau^2 G_s F_s^2(80G_s^6 - 104G_s^4 - 230G_s^2 + 51)/288$ |
| $\frac{1}{2}n\omega$ | $1 \mp S/2 \ + S^2(G_s^4/4 - 5G_s^2/3 + 35/12)/3$ |

symétrie $T_s$, $Lp = Kp = 0$

| | |
|---|---|
| $K_e$ | $-\tau F_s G_s^2(4G_s^2 + 1)/12$ |
| $L_b$ | $-\tau G_s F_s^2(4G_s^2 + 1)/12$ |
| $K_b$ | $\pm G_s \mp \tau^2 G_s F_s^2(80G_s^6 + 72G_s^4 - 146G_s^2 + 13)/288$ |
| $L_e$ | $\mp F_s \mp \tau^2 F_s G_s^2(6 - 77G_s^2 + 28G_s^4 + 40G_s^6)/144$ |
| $\frac{1}{2}n\omega$ | $1 \ - S^2 F_s^2(3G_s^2 - 2)/36$ |

période des orbites: $T = \pi\omega\frac{1}{2}d(nS)/dS$

# Action et période des modes normaux nonlinéaires



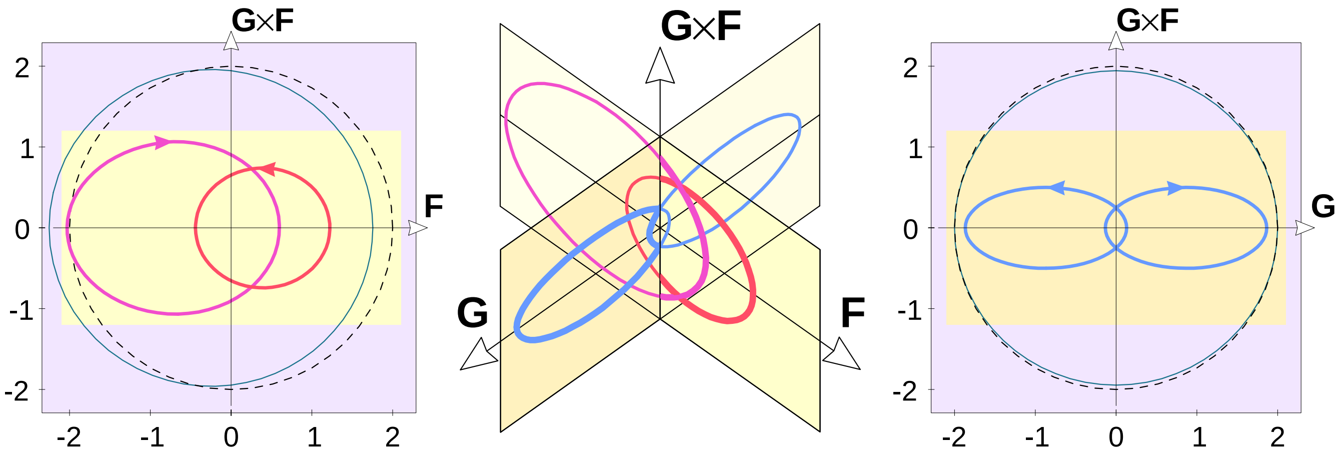

problème des champs orthogonaux

forme normale d'ordre $\epsilon^3$
$S = 0.03,\ 0.06,\ 0.09,\ 0.12,\ 0.15,\ 0.18$

*D. Sadovskií, et B. Zhilinskií*, Phys. Rev. A **57**, 2867–84 (1998)

## Image des modes normaux nonlinéaires dans l'espace physique à 3D

problème des champs orthogonaux
$S = 0.2$ et $F_s = \cos(\pi/3)$ ($\alpha = 1/3$), f.n. d'ordre $\epsilon^3$




*D. Sadovskií, et B. Zhilinskií*, Phys. Rev. A **57**(4), 2867–84 (1998)

# Résultats

- En mathématique appliquée: un développement détaillé de l'utilisation de théorie des invariants et des bases de polynômes aux techniques de normalisation.
- Développement pratique des méthodes de normalisation au voisinage des orbites périodiques.
- En théorie nonlinéaire: la relation explicite entre les modes normaux nonlinéaires et les équilibres relatifs; l'analyse des bifurcations des orbites périodiques basée sur la forme normale; l'analyse en presence de symétries.
- Résultats pour les systèmes concrets: spectroscopie des molécules de type toupie sphérique $SnH_4$, $CF_4$; spectroscopie des molécules diatomiques de Rydberg ArD et KrD. Analyse vibrationnelle pour la molécule $H_3^+$.
- Manifestation des bifurcations dans les systèmes quantiques. Bifurcations "organisées" et equivariants. Phénomènes d'écroulement et des points diaboliques.

## Conclusions

- Application des formes normales dans le cadre de la théorie KAM pour l'étude de la transition entre dynamique régulière et chaotique. Notre travail montre l'efficacité et les limitations de ces méthodes, et en même temps ouvre un nouveau domain de leurs application au systèmes réels.
- La comparaison avec les systèmes quantiques nous donne encore une autre raison de faire confiance à l'analyse qualitative basée sur la normalisation.
- La compréhension des manifestations des structures et des phénomènes dynamiques dans le spectre et le comportement des systèmes quantiques correspondant s'est avéré et va rester un sujet de recherche très important, moderne et fructueux, une direction où les approches mathématiques de la théorie dynamique nonlinéaire sont liées à la mecanique quantique et physique expérimentale.

## Mes remerciements iront à

*Boris Ẑhilinskiĭ* mon enseignant et mon collègue depuis l'Université de Moscou

*John Delos* pour m'avoir orienté vers le domaine de la théorie des formes normales

*Frédérick Roussel, Christophe Van Hecke, Corinne Kolinsky, et Abdelhak Hadj Sahraoui* pour m'avoir aidé pour la traduction française de cette thèse

Monsieur le président, le Professeur *Alain Dubrulle* pour m'avoir incité à joindre l'Université du Littoral et avoir encouragé mes activités de recherche

Professeur *Daniel Boucher*, directeur du LPCA, pour son support financier et administratif

Notre secrétaire M-me *Chantal Desailly* pour sa gentillesse et son aide efficace